

工学硕士学位论文

半球形表面缺陷影响下表面裂纹
应力强度因子的数值分析

THE NUMERICAL ANALYSIS OF THE STRESS INTENSITY
FACTORS FOR THE BODY WITH SURFACE CRACK AND
SURFACE SEMI-SPHERICAL CAVITY

肖新科

哈尔滨工业大学

2006年6月

国内图书分类号：0346.1

国际图书分类号：539.42

工学硕士学位论文

半球形表面缺陷影响下表面裂纹应力强度 因子的数值分析

硕士研究生： 肖新科
导 师： 闫相桥教授
申 请 学 位： 工学硕士
学 科、专 业： 工程力学
所 在 单 位： 复合材料与结构研究所
答 辩 日 期： 2006年6月
授 予 学 位 单 位： 哈尔滨工业大学

Classified Index: O346.1

U.D.C.: 539.42

A Dissertation for the Master Degree in Engineering

THE NUMERICAL ANALYSIS OF THE
STRESS INTENSITY FACTORS FOR THE
BODY WITH SURFACE CRACK AND
SURFACE SEMI-SPHERICAL CAVITY

Candidate:	Xiao Xinke
Supervisor:	Prof. Yan Xiangqiao
Academic Degree Applied for:	Master of Engineering
Specialty:	Engineering Mechanics
Affiliation:	Center for Composite Materials
Date of Defence:	June, 2006
Degree-Conferring-Institution:	Harbin Institute of Technology

摘 要

由于构件中孔洞或其他表面缺陷(比如半球形、圆柱形等)的存在所产生的应力集中,在疲劳载荷的作用下裂纹便可能在孔洞或表面缺陷附近出现。众所周知,孔洞或者其他表面缺陷的存在本身就存在着应力集中,而裂纹的尖端应力场、应变场奇异,这样它们双重的作用将使得结构的分析更加复杂。

因此研究表面缺陷影响下的裂纹体将具有十分重要的理论和实际意义,基于此本文选取了含半球形表面缺陷和表面裂纹的三维线弹性体(简称表面缺陷裂纹问题)作为研究对象,并对断裂分析中的关键参量——应力强度因子进行了数值分析和求解。这个模型应该比众所周知的半椭圆形表面裂纹模型更为典型。

本文在前人研究表面裂纹的基础上,用康奈尔大学断裂力学小组编制的FRANC3D软件,通过选取相关的模型得到如下结论:

(1) 当 $R/t \leq 0.2$, $R/W \leq 0.2$ 且 $R/H \leq 0.2$ 时我们可以认为裂纹体为无限大,而 $R/t > 0.2$, $R/W > 0.2$ 且 $R/H > 0.2$ 时我们则需考虑边界的影响,即视之为有限体。其中 R 为表面裂纹的半径, W 、 t 和 H 分别为裂纹体的半宽、厚度和半长。

(2) 不管裂纹体为无限大或有限大,半球形表面缺陷影响下表面裂纹裂纹前沿的应力强度因子均随着裂尖与前自由表面间距离的增大而减小。

(3) 无限大裂纹体中,裂纹前沿最大的应力强度因子是 R/r 的函数, r 为半球形表面缺陷的半径。并且半球形表面缺陷并不总使强度因子变大(与无半球形表面缺陷时半圆形表面裂纹相比较而言)。

(4) 有限大裂纹体中,裂纹前沿最大的应力强度因子在 R/r 特定的情况下随着 r/t 的增大而增大,在 r/t 特定的情况下随着 R/r 的增大而增大。

(5) 有限大裂纹体中,裂纹前沿的应力强度因子并不都随着 R/t 的增大而增大。其中,裂纹前沿最深点的应力强度因子受 R/t 的影响最大,当 R/t 大约大于 0.8 时,该点的应力强度因子将随着 R/t 的继续增大而减小。

关键词 边界元; 表面缺陷; 表面裂纹; 应力强度因子

Abstract

Due to the stress concentration for the presence of the hole or the other surface flaw (for example, semi-sphere cavity or cylinder cavity) in the component, cracks are likely to initiate at the hole or the surface flaw under the action of fatigue loading. It is well known that the presence of the hole or the surface flaw gives rise to the stress concentration and that the presence of the surface crack causes stress and strain singularities. Thus the stress concentrations and the stress singularities acting together complicate the analysis of the structure.

And it is fair to say that the study of the cracked body with the other surface flaw is of important significance to theory and practice. So the cracked elastic body with semi-spherical cavity (short for the crack problem with surface flaw) is considered and the stress intensity factors(SIFs), which is a critical parameter in the analysis of a cracked body, is studied by numerical method. The model considered here may be a more representative model when it is compared to the well-known surface semi-elliptical crack.

Based on research of the surface crack in existence, the present paper, in which the relevant models are selected and analyzed by FRANC3D which is a fracture analysis software developed by a fracture investigation group of Cornell University(CFG), arrives at the following conclusions:

(1) When $R/t \leq 0.2$, $R/t \leq 0.2$ and $R/H \leq 0.2$, the cracked body can be accepted as infinite. And when $R/t > 0.2$, $R/W > 0.2$, $R/H > 0.2$, we can receive it as finite(R is the radius of the surface crack. W is the half width of the cracked body. t is the thickness and H is the half length of the cracked body).

(2) The stress intensity factors(SIFs) in the crack front decreases with the increase of the distance from the upper free surface regardless of the cracked body type(infinite or finite).

(3) The maximum stress intensity factors is a function of R/r (r is the radius of the surface semi-spherical cavity) for the infinite cracked body. And the surface semi-spherical cavity doesn't always amplify the stress intensity factors(SIFs) when it is compared to the stress intensity factors for the

corresponding infinite cracked body without the surface semi-spherical cavity.

(4) The maximum stress intensity factors(SIFs) increases with the ratio of r/t when R/r is fixed and increases with the ratio of R/r when r/t is fixed for the finite cracked body.

(5) The stress intensity factors(SIFs) doesn't always increase with the ratio of R/t . And the stress intensity factors(SIFs) at the deepest point in the crack front is affected more sharply. When R/t is about greater than 0.8, the stress intensity factors(SIFs) at this point will decrease with the increase of R/t .

Keywords boundary element method; surface flaw; surface crack; stress intensity factors

目 录

摘 要.....	I
Abstract.....	II
第 1 章 绪论.....	1
1.1 课题背景和意义	1
1.2 国内外研究现状	3
1.2.1 半椭圆表面裂纹的研究现状.....	3
1.2.2 孔边裂纹的研究现状	6
1.2.3 国内外研究现状的总结.....	8
1.3 本文的主要研究内容	9
第 2 章 线弹性断裂力学与边界元法.....	10
2.1 线弹性断裂力学概述	10
2.1.1 线弹性断裂力学	11
2.1.2 应力强度因子	14
2.1.3 三维裂纹问题	15
2.1.4 应力强度因子的求解	15
2.2 边界元法基础和FRANC3D	17
2.2.1 区域型解法和边界型解法.....	17
2.2.2 弹性力学方程	19
2.2.3 基本解或开尔文解	20
2.2.4 边界元公式	21
2.2.5 FRANC3D软件简介	24
2.3 本章小结	27
第 3 章 无限大体中的表面缺陷裂纹.....	28
3.1 计算模型的选取	28
3.2 半圆形表面裂纹	28
3.3 表面缺陷裂纹问题无限大体的确定	31
3.4 无限大裂纹体中的应力强度因子.....	31
3.5 本章小结	33
第 4 章 有限大体中的表面缺陷裂纹.....	37

4.1 引言.....	37
4.2 模型选取和计算结果	37
4.3 表面缺陷对应力强度因子的影响	38
4.4 裂纹体厚度对应力强度因子的影响	44
4.5 本章小结	44
第 5 章 后自由表面对应力强度因子的影响	46
5.1 引言	46
5.2 后自由表面对应力强度因子的影响	46
5.2.1 后自由表面对应力强度因子的影响	46
5.2.2 裂纹前沿最深点的应力强度因子	49
5.3 本章小结	50
结论	52
参考文献	53
攻读学位期间发表的学术论文	57
哈尔滨工业大学硕士学位论文使用授权书	58
哈尔滨工业大学硕士学位涉密论文管理	58
致谢	59

第1章 绪论

1.1 课题背景和意义

断裂力学是研究含裂纹构件断裂强度的一门学科，确切的讲，是研究含裂纹构件的平衡、扩展和失稳的一门学科。自从上世纪 50 年代中期以来，断裂力学作为固体力学研究中最活跃的领域之一，已经发展成为应用力学的一个重要分支。它的迅速发展主要是受到了结构可靠性和新材料这两方面推动的，这就使得断裂力学不是单纯的一门力学，而是广泛涉及到若干门学科如物理、化学、力学、数学、材料科学和工程科学等的一门综合科学。由于在航空、航天、压力容器、高强度材料、核反应堆结构、造船、化工、地质力学、地震预报、大型焊接结构及大型铸锻件等方面的广泛应用，断裂力学表现出强大的生命力，从而引起了世界各国科学家的普遍重视，同时也使得断裂力学成为许多工程技术领域中不可或缺的组成部分。

从空间时代开始，随着空间发射的日益增多，空间碎片的数量也在不断增加：失效的航天器以及发射过程中同时进入轨道的末级火箭，发射过程中产生的各种废物，航天员在飞船、航天飞机、空间站上工作生活的废弃物，末级火箭、卫星爆炸、反卫星(ASAT)武器实验或撞击产生的碎片，火箭发动机和其他变轨姿态发动机的燃烧物以及剥落下来的漆片、涂层等，构成了分布在航天活动各种常用轨道上的空间碎片环境。这些碎片的轨道速度一般为 8km/s，对航天器的正常工作和航天员的生命造成了严重的威胁^[1]。当一部分高速飞行的空间碎片撞击到航天器上时会损坏航天器结构的表面材料，造成撞击坑(图 1-1)，对表面器件造成损伤，使航天器表面强度降低，甚至出现裂纹(图 1-2)，高压容器的舱壁受损可能会引发爆炸。而空间碎片以及微流星撞击航天器造成的损害、甚至引起失效的事例已发生多起。所以，如何保证航天器的安全，防止航天器在受到撞击后发生灾难性破坏就成为当前一个十分重要的问题。

本文的研究对象选定为受到空间碎片撞击而产生撞击坑和裂纹的结构。断裂力学为定量地分析含裂纹体或结构的力学行为提供了理论基础，其中线弹性断裂力学(LEFM)是裂纹体分析的出发点^[2]。由线弹性断裂力学的原理可知：裂纹应力强度因子(SIF)是裂纹尖端附近应力、位移场强度的表征，

是控制裂纹尖端应力场强度的参数，所以应力强度因子就成为裂纹体分析中的关键参量^[3]。作为线弹性裂尖场的表征参量，应力强度因子在裂纹体的分析中就处于中心地位，因而使得确定裂纹尖端的应力强度因子成为极其重要的研究课题之一。基于此，本文从受到撞击产生表面缺陷的结构中抽象出来一种模型来研究表面缺陷(如半球形表面缺陷)影响下表面裂纹的应力强度因子就具有十分重要的理论和工程实际意义。



图 1-1 高速撞击产生的撞击坑

Fig.1-1 The surface flaw engendered by high-velocity impact

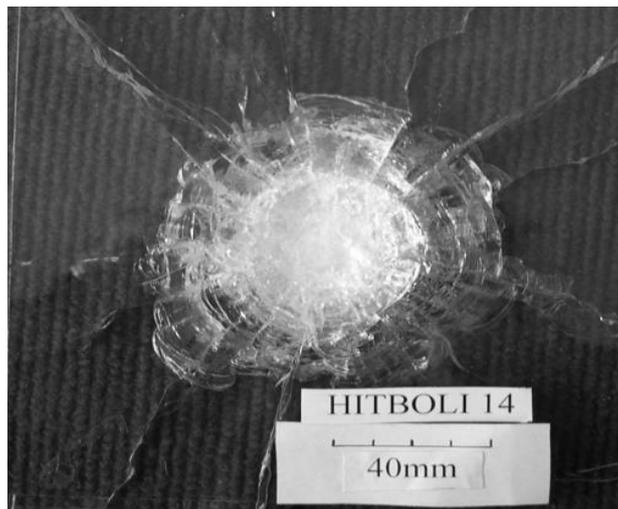


图 1-2 高速撞击产生的表面缺陷和裂纹

Fig.1-2 The surface flaw and cracks engendered by high-velocity impact

1.2 国内外研究现状

裂纹问题严格来说都是三维问题，并且工程中所遇到的裂纹问题其物体(如机械构件，土建结构)总是有限的。因此对有限裂纹问题进行三维分析不仅在理论上，而且在工程上都很有重要的意义^[4]。

表面裂纹断裂力学是在上世纪七十年代迅速发展起来的科学。它不仅研究表面裂纹扩展的规律，而且还通过分析表面裂纹前沿附近的应力、应变和应力强度因子以及测定带表面裂纹试件的断裂参数，建立断裂准则。它可以解决构件的选材，确定构件允许的最大初始裂纹尺寸、估计构件的疲劳寿命、剩余强度和检测周期等，从而保证构件的安全使用。但是，表面裂纹前沿附近的应力分布是一个三维弹性力学问题，它的解比穿透裂纹的解要复杂得多，而且目前仍未得到解析解^[5]。

表面裂纹理论应包括两方面的内容：一方面为应力强度因子 K 的求解；另一方面为裂纹扩展速率的描述。鉴于本文的研究内容，我们只考虑应力强度因子求解的相关内容。

近年来，人们广泛地采用交替迭代法、边界积分法、超奇异积分法^[6]、有限元法和有限差分法获得了若干数值解，或者采用简化模型(把裂纹假定为半椭圆或部分圆形)得到了一些近似解和经验公式^[7]。

1.2.1 半椭圆表面裂纹的研究现状

1.2.1.1 Irwin 的近似解

Green 和 Snedden^[8]通过精确的应力分析推导出了承受均匀分布拉伸载荷的无限弹性体内扁平椭圆裂纹前沿 I 型应力强度因子。设无限大物体内部有一个椭圆盘状裂纹，长半轴为 b ，短半轴为 a ，在垂直于裂纹平面方向上的无穷远处受均布拉伸应力 σ 或椭圆裂纹表面受均匀内压 σ ，这是一个以裂纹所在平面为对称面的受力问题，因此是 I 型裂纹问题。Green 和 Snedden 对此已经求得应力强度因子：

$$K_I = F\sigma\sqrt{\pi a} \quad (1-1)$$

式中 $F = 2(1 - K^2 \cos^2 \theta)^{\frac{1}{4}} / E(K)$ ，其中： $K^2 = 1 - (K')^2$ ， $K' = \frac{a}{b}$ ， θ 为椭圆盘状裂纹前沿任一点矢径与长轴的夹角， $E(K)$ 为第二类完全椭圆积分，

$$E(K) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - K^2 \sin^2 \theta} D\theta$$

其中 K_I ——I型裂纹应力强度因子

从上式看到，椭圆裂纹前沿的每一点 K 一般都不相同，在椭圆的短轴两端 ($\theta = \pm \pi/2$)， F 值最大， $F_{\max} = 1/E(K)$ ；在椭圆长轴两端 ($\theta = 0, \pi$)， F 值最小， $F_{\min} = \sqrt{a/b}/E(K)$ 。所以，短轴两端应力强度因子最大，长轴两端应力强度因子最小，椭圆的长短半轴的比例不同， F_{\max} 的数值也不同。

1962 年 Irwin^[9]首先研究了表面裂纹问题，他根据 Green 和 Snedden 的工作结果，提出半椭圆表面裂纹应力强度因子的近似解，Irwin 考虑了前自由表面的影响，对由 Green 和 Snedden 导出公式 $K_I = F\sigma\sqrt{\pi a}$ 做出修正，Irwin 假定表面裂纹应力强度因子与无限体内椭圆裂纹的最大应力强度因子之比，等于具有两个对称边裂纹的有限宽板 K_I 与具有中心裂纹的有限宽板 K_I 之比，即

$$\frac{K_{I\text{表}}}{K_{I\text{埋}}} = \frac{K_{I\text{边}}}{K_{I\text{中心}}} \quad (1-2)$$

由 Westergard^[10]函数法并经过修正推出：

$$K_{I\text{中心}} = \sqrt{\frac{w}{\pi a} \tan\left(\frac{\pi a}{w}\right) + 0.1 \sin\left(\frac{2\pi a}{w}\right)} \sigma \sqrt{\pi a} \quad (1-3)$$

其中 a 是裂纹长度， W 为板宽。当 $a/w \ll 1$ 时有：

$$K_{I\text{表}} = 1.1 K_{I\text{埋}} = \frac{1.1\sigma\sqrt{\pi a}}{E(K)} \quad (1-4)$$

记 $M_I = 1.1$ ，并称之为前表面修正系数。

上述修正，其误差可达 10%，由于 Irwin 的近似解只考虑了前表面修正系数，他所做的假设也是比较粗糙的，但是，Irwin 近似解一般给出偏高的结果，应用实际时偏于安全，至今仍为工程采用。

1.2.1.2 Paris-Sih 的研究修正

Paris-Sih^[11]在 Irwin 的基础上做了深入的分析，给出了更加精确的结果。他考虑了 M_I 应随 a/c 的变化 (a 表示裂纹深度， c 表示半椭圆形裂纹长半轴)，并用内插法给出了前表面修正系数：

$$M_I = 1 + 0.12(1 - a/c) \quad (1-5)$$

1.2.1.3 交替迭代法的修正

Kobayashi^[12]根据由交替迭代法得到的半圆形表面裂纹比较精确的数值

结果并得到 $M_I=1.03$ ，并采用了当 $a/c \rightarrow 0$ 时， $M_I=1.12$ ，给出一个内插公式：

$$M_I=1+0.12[1-a/(2c)]^2 \quad (1-6)$$

对于较浅的裂纹，Hartranft 和 sin^[13]给出的结果为：

$$M_I=1.13-0.07(a/c)^{\frac{1}{2}} \quad (1-7)$$

以上 3 个经验公式，对 $a/B \ll 1$ (B 为裂纹体的厚度) 时，差别不大。由于仅考虑了前表面的影响，只适用于所谓表面浅裂纹，当 a/B 不是很小时，需要考虑后表面的影响。

Shah 和 Kobayashi^[14]采用交替迭代法综合地考虑了前后表面的影响，设总的修正系数为 M_e ，则应有：

$$M_e = M_1 M_2 \quad (1-8)$$

其中 $M_1=1+0.12[1-a/(2c)]^2$ 作为前自由面影响； $M_2=\sqrt{\frac{2B}{\pi a} \tan\left(\frac{\pi a}{2B}\right)}$ 作为后自由面的影响。

Shah 和 Kobayashi 公式给出的结果与实验结果符合较好，因此获得了广泛的应用。

1.2.1.4 Newman 和 Raju 的有限元法

Newman 和 Raju^[15]利用节点力法并通过三维有限元分析的结果给出了一个半椭圆表面裂纹，在垂直裂纹面的远处受均匀拉伸应力 σ 的应力强度因子公式，即：

$$K_I = F\sigma\sqrt{\pi a} \quad (1-9)$$

这里 $F = \left[M_1 + M_2 \left(\frac{a}{h} \right)^2 + M_3 \left(\frac{a}{h} \right)^4 \right] \left[1 + 1.464 \left(\frac{a}{b} \right)^{1.65} \right]^{\frac{1}{2}} f_\Phi g f_w$

其中， M_1 ， M_2 ， M_3 ， f_Φ ， g ， f_w 为修正系数

a ——半椭圆表面裂纹的深度，(m)；

b ——含裂纹板的半宽，(m)；

c ——半椭圆表面裂纹的半长，(m)；

h ——含裂纹板的半长，(m)；

t ——含裂纹板的厚度，(m)；

σ ——外载，(MPa)；

K_I ——I型裂纹应力强度因子, ($\text{MPa}/\text{m}^{1/2}$)。

图 1-3 为有限板承受拉伸或弯曲载荷作用的示意图, 图 1-4表示的是带表面裂纹板的典型有限元模型。

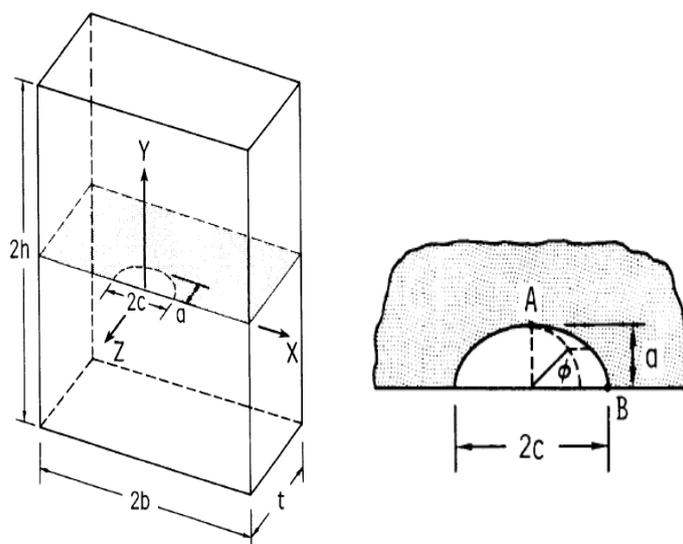


图 1-3 有限板中的表面裂纹

Fig.1-3 Surface crack in a finite plate

由于节点力法不需要做平面应力或平面应变的假设, 这就使得这种方法具有很大的优越性, 同时此方法也被证明是最为精确的。

1.2.2 孔边裂纹的研究现状

工程中出现的孔边裂纹或槽口裂纹也引起了学术界的广泛关注, Smith R. A.和 Miller K. J.^[16]、Lucas P.^[17]、Kujawski D.^[18]、Jones R.^[19]等都对该问题进行了研究, 并取得了一定的研究成果。

三维孔边半椭圆裂纹(见图 1-5)的应力强度因子一般可写为:

$$K_I(\phi) = F \left\{ \frac{\sigma}{E(K)} \sqrt{\pi a} \left(\sin^2 \phi + (c/a)^2 \cos^2 \phi \right)^{1/4} \right\} \quad (1-10)$$

式中, a 为半椭圆表面裂纹的深度, c 为半椭圆表面裂纹的半长, σ 为施加的外载, ϕ 为图 1-6 所定义的一个参数, $E(K)$ 为第二类完全椭圆积分, F 为一个无量纲的因子, $\{ \}$ 括号内的这部分表示的是相应的无孔的内嵌椭圆裂纹的裂尖应力强度因子的解。

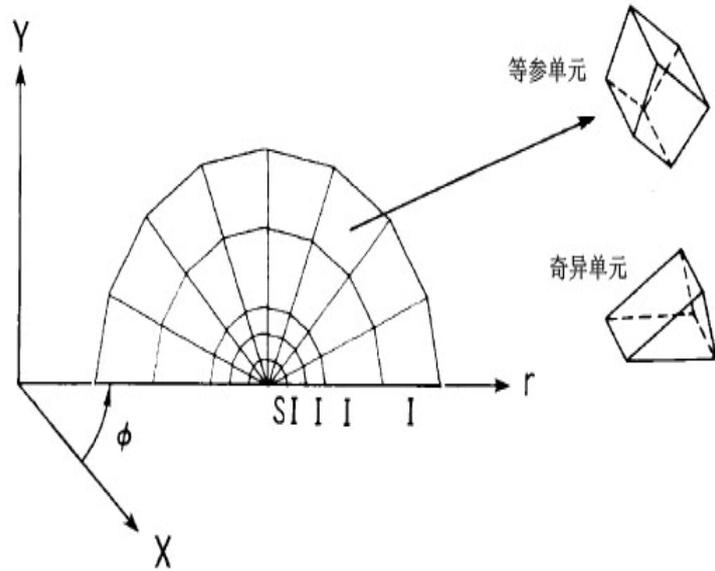
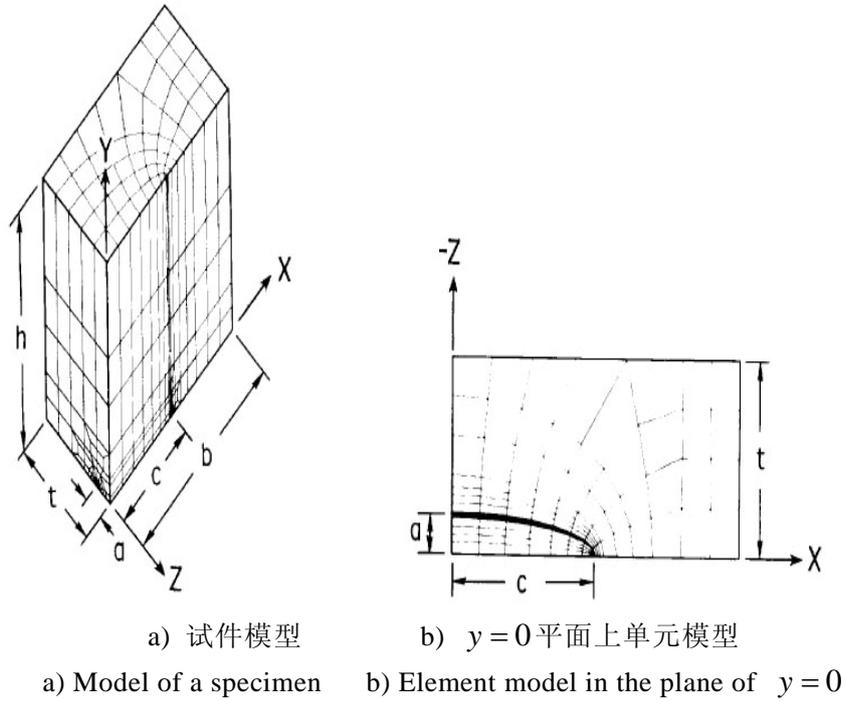


图 1-4 含半椭圆表面裂纹板的有限元模型 (r 为径向坐标)

Fig.1-4 Finite element model of a plate containing a semi-elliptical surface crack (r is the radial coordinate)

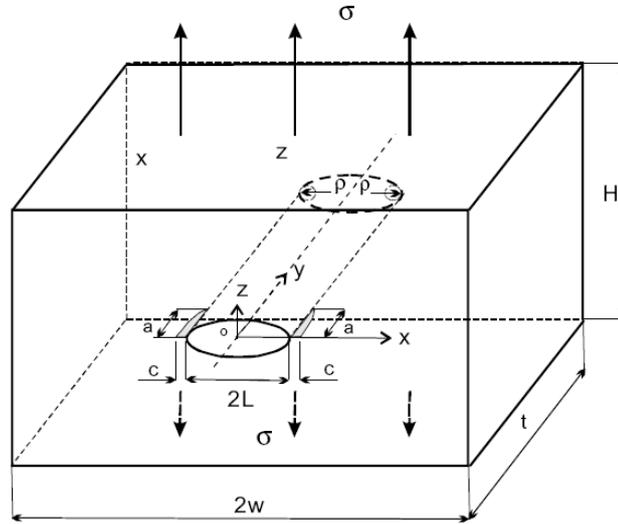


图 1-5 孔边的表面裂纹

Fig.1-5 Schematic diagram for surface cracks at a notch

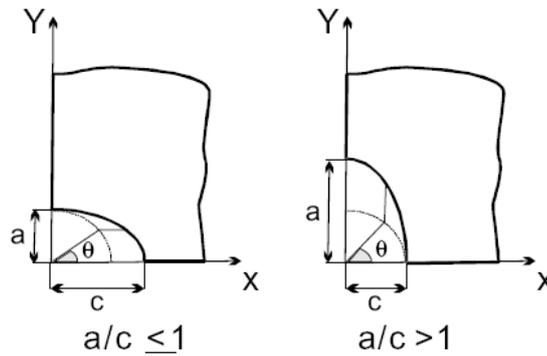


图 1-6 参数角的定义

Fig.1-6 The parametric angle defined

Peng D.^[19,20]等用权函数法给出了无量纲因子 F ，其他学者通过各种数值方法也给出了这个因子的解答。

1.2.3 国内外研究现状的总结

通过以上各式的综述来看，对于板表面裂纹应力强度因子公式可以统一

表示为：

$$K_I = F\sigma\sqrt{\pi a} \quad (1-11)$$

只是不同的解给修正因子 F 赋予不同的表达式。

但是，以上各学者讨论的问题要么是单纯的表面裂纹问题，而没有考虑其他缺陷的影响，要么就是槽口表面裂纹(图 1-5)，即缺陷是穿透型的，但实际结构中大量存在一类非穿透型的表面缺陷，并对相应的结构产生着巨大的影响，也可以说非穿透型表面缺陷影响下的表面裂纹问题应该是继半椭圆表面裂纹和槽口裂纹之后又一典型的问题。

1.3 本文的主要研究内容

确定应力强度因子的方法有解析法、实验法和数值方法等。解析法是其其他方法的基础，由解析法推出裂纹尖端附近区域应力、位移场是其他方法的出发点。目前，在解析法中，广泛运用的是复变函数法和积分变换法。解析法要精确满足边界条件，但这通常是难于做到的。解析法所能解决的问题只占一小部分，而更多的需要用数值计算方法来完成。

在数值算法中，广泛适用的是边界元法(BEM)和有限元法(FEM)。边界元法的最大优点是网格的剖分只在边界上进行，降低了问题的维数，简化了数据准备工作。在很多情况下，边界元法比有限元更加经济和精确，特别适于求解裂纹问题。

本文从工程中简化出来一种含半球形表面缺陷(非穿透型表面缺陷)和表面裂纹的三维线弹性体模型，并使用基于边界元理论的断裂力学计算软件讨论表面裂纹裂纹前沿的应力强度因子，具体包括以下内容：

(1) 含半球形表面缺陷和表面裂纹的三维线弹性体有限大与无限大的界限。

(2) 含半球形表面缺陷和表面裂纹的三维无限大线弹性裂纹体中裂纹前沿应力强度因子的变化规律，以及半球形表面缺陷的几何尺寸对裂纹尖端应力强度因子的影响。

(3) 含表面缺陷和表面裂纹的三维有限大线弹性裂纹体中裂纹前沿应力强度因子的变化规律，以及表面裂纹的几何尺寸和裂纹体厚度对应力强度因子的影响。

第2章 线弹性断裂力学与边界元法

2.1 线弹性断裂力学概述

在工程结构的设计中，传统设计方法是由设计载荷求得结构中的最大应力，根据最大应力小于材料的许用应力的原则，选取材料或者设计材料和结构。设计载荷由使用中出现的最大载荷乘以安全系数 f 得到；材料的许用应力则由材料的强度除以安全系数 f 得到。但是，很多结构的破坏，特别是含裂纹结构的破坏，使得这种传统的材料力学的强度理论无法解释。

人们通过广泛深入地研究，从根本上去探讨传统的设计思想，认识它的不足，寻求更合理的设计途径，特别是从大量的低应力脆断事故中发现，传统的设计思想存在一个严重的问题，就是它把材料视为无缺陷的均匀连续体，这与工程实际中的构件的情况是不相符合的。对于工程实际中的构件，总是不可避免地存在着不同形式的缺陷(如夹杂、气孔、裂纹等)，正是由于这些缺陷的存在，使材料的实际强度大大低于理论模型的强度。研究结果还发现，脆性断裂是由于裂纹和应力集中造成的。同时还发现低温也往往会导导致常用的各类钢发生脆性断裂。

所以，裂纹(缺陷)是造成构件低应力脆性断裂的祸根，但是，这也并不是说构件存在裂纹就一定会发生断裂。这正是断裂力学所要回答的问题。

断裂力学是固体力学的一个分支，是研究含裂纹体强度和裂纹扩展规律的一门学科，也称裂纹力学。

可以毫不夸张地说，断裂力学的发展已经成为过去几十年来力学学科和材料学学科最伟大的成就之一。不管是在政府机构还是在私人部门中，世界范围内已经形成一个共识，即大家普遍认识到结构破坏所带来的经济影响，以及由对断裂机理的根本认识到运用断裂的相关知识到工程实践所带来的巨大利益。

裂纹是非常昂贵的——除了花在维护和维修上的时间和精力，它们的存在很可能导致构件的断裂或者子结构的失效，进而可能危及人们的生命。美国一个国家委员会(National Committee)曾就断裂所造成的损失作出一个评估，发现该损失竟占到了国民生产总值(GNP)的 4%，所以设法降低由断裂所造成的损失是很有必要的。因为裂纹不可避免地存在着，所以我们必须制

定相应的程序去定量地预测服役中含裂纹结构的行为。裂纹可能是在材料的加工过程中产生的，也可能在振动的过程中产生，或者是由疲劳、腐蚀等对结构的损害中产生的。当裂纹可能成为服役结构不安全的因素时，就需要建立系统的科学以描述裂纹和由裂纹所产生的影响。这种科学就是断裂力学，其主要的标志便是应力强度因子。

2.1.1 线弹性断裂力学

对断裂现象的第一次系统研究是在 20 世纪 20 年代由 A.A.Griffith^[21]开展的。他的试验研究是在脆性材料——玻璃上进行的。为了解释不同玻璃棒测得的强度，他假定了存在类似裂纹的缺陷，这种缺陷在外载荷的作用下其形状能够扩展。A.A.Griffith 进而又假定裂纹的扩展是由可得到的应变能和形成新裂纹所需要消耗的能量之间的平衡决定的。

1946 年，Sneddon^[22]进一步研究了这个问题，他研究了无限大体中的钱币形裂纹，得到了裂纹尖端附近的渐近应力场，并且得到了二维裂纹问题的控制参数。

Irwin^[23]总结了裂尖应力场的普遍形，他发现应力场同时取决于空间坐标和一个单一的参数，此参数即为应力强度因子 K 。另外 Irwin 还证明了断裂力学中的能量平衡法和应力强度因子法是等价的^[24]。

线弹性断裂力学的基本假定是裂纹的行为(不管它们是否扩展或者扩展的速度如何)唯一地取决于应力强度因子。对于一个裂纹体来说，裂纹变形的形式有三种。这三种裂纹形式的区别在于裂纹的上表面与下表面的相对变形形式，如图 2-1 所示。通常我们称之为：张开型(opening mode)，滑开型(sliding mode or shearing mode)，撕开型(tearing mode)。同时我们也称张开型为 I 型，滑开型为 II 型，撕开型为 III 型。两种或三种基本型的组合称为复合型裂纹问题。

设 u ， v ， w 是沿 x ， y ， z 方向的位移分量，将裂纹面看成位移的间断面，即空间坐标相同的裂纹的两个表面上点的位移是不连续的。图 2-1 所示的三种基本裂纹模型分别具有以下特点：

- (1) 张开型：裂纹面上的位移 v 发生间断。
- (2) 滑开型：裂纹面上的位移 u 发生间断。
- (3) 撕开型：裂纹面上的位移 w 发生间断。

张开型、滑开型及其他两个的复合型裂纹问题为平面裂纹问题；撕开

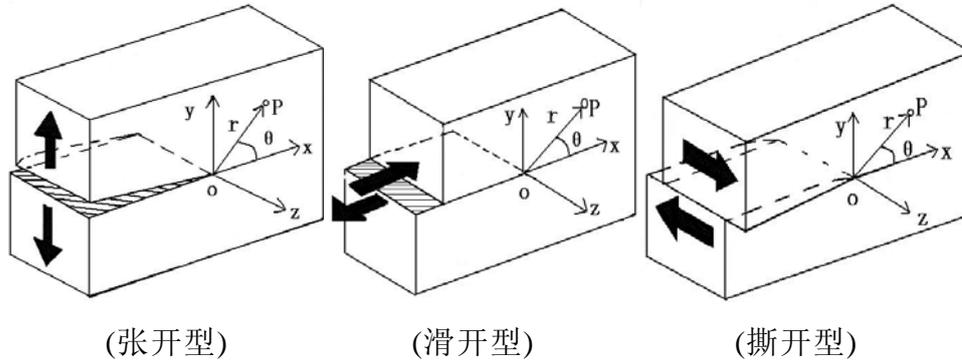


图 2-1 裂纹的三种基本形式

Fig.2-1 Three modes of crack tip motion

型裂纹问题为反平面裂纹问题。

基本裂纹模型在裂尖附近的应力和位移场可表达为公式(2-1)至(2-6):

1. 张开型

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (2-1a)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (2-1b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (2-1c)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (2-1d)$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (\text{平面应变}) \quad (2-1e)$$

$$\sigma_z = 0 \quad (\text{平面应力}) \quad (2-1f)$$

$$u = \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2k-1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] \quad (2-2a)$$

$$v = \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2k+1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (2-2b)$$

$$w = 0 \quad (\text{平面应变}) \quad (2-2c)$$

$$w = -\int \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)dz \quad (\text{平面应力}) \quad (2-2d)$$

2. 滑开型

$$\sigma_x = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2-3a)$$

$$\sigma_y = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (2-3b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2-3c)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (2-3d)$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (\text{平面应变}) \quad (2-3e)$$

$$\sigma_z = 0 \quad (\text{平面应力}) \quad (2-3f)$$

$$u = \frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2k+3) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (2-4a)$$

$$v = -\frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2k-2) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right] \quad (2-4b)$$

$$w = 0 \quad (\text{平面应变}) \quad (2-4c)$$

$$w = -\frac{\nu}{E} \int (\sigma_x + \sigma_y)dz \quad (\text{平面应力}) \quad (2-4d)$$

3. 撕开型

$$\tau_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (2-5a)$$

$$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (2-5b)$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \quad (2-5c)$$

$$w = \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (2-6a)$$

$$v = u = 0 \quad (2-6b)$$

以上各式中：

r, θ ——裂纹尖端附近点的极坐标;

u, v, w ——位移分量;

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ ——应力分量;

μ ——剪切弹性模量;

ν ——泊松比;

K_I, K_{II}, K_{III} ——分别为 I、II、III 型裂纹的裂纹尖端应力强度因子;

$$k = \begin{cases} 3-4\nu & (\text{平面应变}) \\ \frac{3-\nu}{1+\nu} & (\text{平面应力}) \end{cases}。$$

2.1.2 应力强度因子

综上所述, 各种类型裂纹尖端附近的应力场和位移场, 有相似之处, 可将它们简写为如下形式:

$$\sigma_{ij}^{(I)} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(I)}(\theta) \quad (2-7a)$$

$$u_i^{(I)} = K_I \sqrt{\frac{r}{\pi}} g_i^{(I)}(\theta) \quad (2-7b)$$

式中 σ_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) 代表应力分量, u_i ($i=1, 2, 3$) 代表位移分量, 上标 (I) 代表 I 型, $f_{ij}(\theta)$ 和 $g_i(\theta)$ 代表极角 θ 的函数。如上标写成 II 或 III, 则代表 II 或 III 型。

应力场公式(2-7a)的特点:

(1) 在裂纹尖端, 即 $r=0$ 处, 应力趋于无限大, 应力在裂纹尖端出现奇异点;

(2) 应力强度因子在裂纹尖端是有限量;

(3) 裂纹尖端附近区域的应力分布是 r 和 θ 的函数, 与无限远处应力和裂纹长无关。

根据上述裂纹尖端附近应力场特点, 看出以应力为参量来建立传统的强度条件, 就失去了意义。但是, 应力强度因子是有限量, 它是代表应力场强度的物理量。

为了评价含裂纹构件的响应, 从以上所述的线弹性断裂力学基本内容中就可以看出研究应力强度因子的必要性。应力强度因子是一个关于载荷和裂

纹体几何的函数，一般可写为：

$$K_I = Y\sigma\sqrt{\pi a} \quad (2-8)$$

式中 σ ——名义应力(裂纹位置上按无裂纹计算的应力)，(MPa)；

a ——裂纹尺寸(裂纹长或深)，(m)；

Y ——形状系数(与裂纹大小、位置等有关)；

K_I ——应力强度因子，下标 I 代表 I 型，如下标写成 II 或 III，则代表 II 或 III 型，(MPa/m^{1/2})。

应力强度因子主要用于以下三个方面：

- (1) 确定静态含裂纹体的强度。
- (2) 在交变载荷下裂纹的扩展速率问题(疲劳)。
- (3) 在腐蚀环境下裂纹的扩展速率(应力腐蚀)。

2.1.3 三维裂纹问题

自从 Sach^[25]和 Sneddon^[26]发表了两篇关于钱币形裂纹的文章以及 Green 和 Sneddon^[27]发表的受到垂直于裂纹面的单轴拉伸载荷的无限体中的椭圆裂纹的文章之后，又有一系列的论文，包括在其他载荷条件下的圆形裂纹^[28]和椭圆裂纹^[29~31]问题，发表了出来。这些研究本身就限制了它们的工程实际应用，因为在很多问题中我们必须考虑结构的有限尺寸。有限几何尺寸影响的最常见的例子便是表面裂纹(缺陷)问题，这个问题到如今还未得到精确解，人们通过多种数值方法对表面裂纹问题进行了广泛地研究。

为了把二维断裂理论推广到三维，我们必须研究裂纹前沿区域的应力场。Irwin^[32]给出了平面应变假设并推导出了椭圆形裂纹的应力强度因子 K_I 。后来，Irwin 的假设得到了证实^[28,30]，即应力强度因子可以由裂尖的局部坐标系中得到，即在以裂纹前沿的切线为法线的平面内二维断裂理论适用。该坐标系由裂纹前沿裂尖的切线 t ，法线 b 和另一垂直于由裂尖切线和法线组成平面的直线 n 所构成^[33]，如图 2-2、图 2-3 所示。

2.1.4 应力强度因子的求解

在三种裂纹类型中，I 型裂纹是工程上最为常见最为危险而且在技术上也最为重要的一种类型^[34]。所以本文就以 I 型裂纹为例，分析应力强度因子。

当采用数值方法的刚度法求应力时，应力场都要通过对位移场求偏导

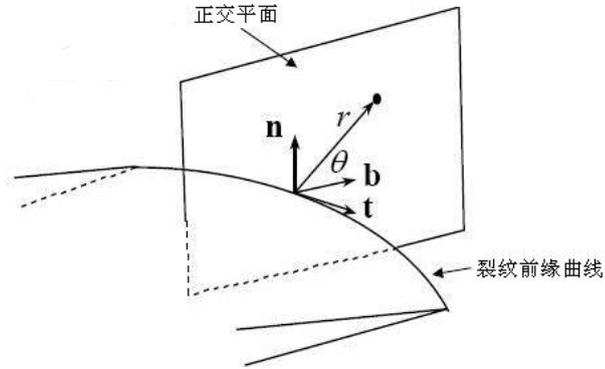


图 2-2 裂纹前沿局部坐标系

Fig.2-2 Local coordinate system for a curved crack

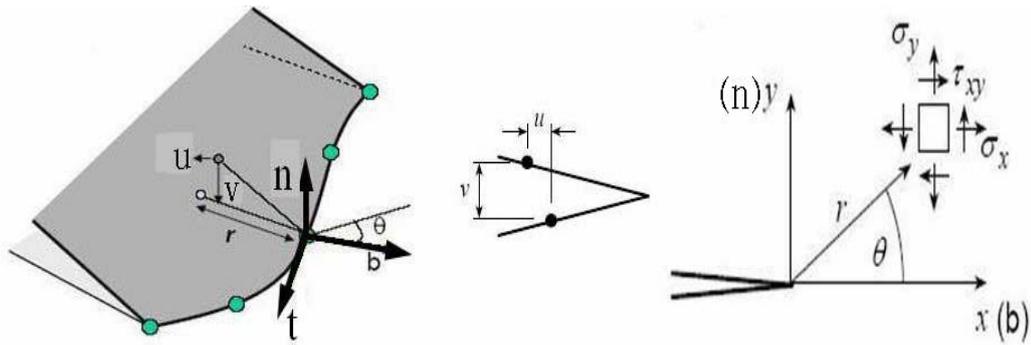


图 2-3 裂纹前沿位移和应力示意图

Fig.2-3 Displacement and stress near the crack tip

数，求得的应力与位移法比较，精度要差很多。因此，求应力强度因子的应力法其精度比位移法要低。因为 $\theta = \pi$ 处张开位移 v 比较显著，可以得到较精确的近似值，所以通常我们采用 $\theta = \pi$ 时的裂纹张开位移 $v(r, \pi)$ 求 K_I 。

当 $\theta = \pi$ 时，公式(2-2)即简化为：

$$u = 0 \quad (2-9a)$$

$$v = \frac{4(1+\nu)(1-\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} K_I \quad (2-9b)$$

由(2-9b)我们可以很容易的导出应力强度因子的求解表达式：

$$K_I = \frac{E}{4(1+\nu)(1-\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} v \quad (2-10)$$

如果我们通过数值方法求出裂纹张开位移 $v(r, \pi)$ ，则应力强度因子可解。

2.2 边界元法基础和 FRANC3D

在实际工程中，由于问题的复杂性，只有极少数简单裂纹问题找到了解析解，绝大多数工程实际中所遇到的断裂力学问题都要借助于数值分析方法才能得到解决。由于裂纹尖端附近应力场存在奇异性，直接用常规数值方法分析断裂力学问题的效果往往较差，所以有必要结合断裂力学特点发展更有效的方法。边界元(BEM)方法分析处理断裂力学问题具有独到的优势。

2.2.1 区域型解法和边界型解法

物理问题的数值分析方法可以大致分为区域型解法和边界型解法。目前，最通用、有效的区域型解法是有限元法(FEM)；另一种常用的区域型解法是有限差分法。常用的边界型解法有边界元法(BEM)和边界配置法。边界配置法实际上是一种半解析的数值方法，在各种边界配置法具体实施时，针对具体问题的特点，采用精心挑选的权函数和试函数能使计算精度大大超过其他纯数值分析方法。实际上，对于不存在解析解的断裂力学问题，由边界配置得到的数值解常被当作衡量其他数值方法所得结果的“精确解”。遗憾的是，该方法对裂纹的几何形状有一定限制，而且目前尚不能处理三维裂纹问题。以下以有限元法和边界元法解弹性力学问题为例，对区域型解法和边界型解法的优缺点进行比较。

FEM 经过几十年的发展已在工程界确立了它的主导地位并解决了大量工程实际问题。用 FEM 解弹性力学问题的偏微分方程时，首先要将弹性体所占的整个体积划分为若干单元，在这些单元的节点上对偏微分方程组进行离散，得到一组线性代数方程组，再通过解此线性代数方程组得到该弹性力学问题的解。但 FEM 在输入数据的准备上比较繁琐，在整个区域内划分网格也很麻烦，特别对场量变化剧烈的特殊问题或者无穷域问题等，其应用受到一定限制。

BEM 从弹性力学问题所满足的弹性体边界之一的一组边界积分方程出发，因此仅需将弹性体边界划分单元，将边界积分方程组化为线性代数方程组求解。BEM 的优点是显而易见的：与 FEM 相比，BEM 需要处理的空间维数降低了一维，使得输入数据的准备大为简化，网格的划分和重新调整更

为方便,最后形成的代数方程组的规模也小得多,因此能够大大缩短计算时间。正因为如此,BEM 最近得到迅速发展,并已受到学术界和工程界的广泛重视。在此需要指出,若问题存在分布体积力,或者控制微分方程仅为准线性方程(如弹塑性问题),则用 BEM 解弹性力学问题时,除边界积分外,还需加上一项体积分,因此也要将整个体积进行网格划分。不过这种情况下的体积网格划分并不增加最后需要求解的方程阶数,BEM 的长处仍得以保留。

BEM 的特点之一是作为边界积分方程权函数的基本解能严格满足问题的控制微分方程,并且基本解的奇异性使最后形成的代数方程组的系数矩阵中对角线和近对角线元素的值远大于其他元素的值,从而使 BEM 的计算精度得到大大提高,特别适用于处理场量变化梯度很大的问题,比如裂纹问题。BEM 在解决三维空间和无界域中含裂纹的问题时更具有特殊的优点,这对断裂力学的工程实际应用是非常重要的。

BEM 要用到叠加原理,故只适用于完全线性或增量线性的系统。幸运的是后一类情形使 BEM 的应用范围可以扩展到大量工程科学中感兴趣的问题。目前尚有少数问题能用 FEM 求解,而 BEM 却无法求解,或者至少不能具有同样的效率。在这类问题中,或者是由于各介质单元的材料性质不相同,或者是问题的几何构形在某个几何方向比起其余方向的尺度小的不成比例,但又不足以忽略其有效尺寸(例如中等厚度的板壳、窄长的薄条等)。另一方面,用常规的 BEM 处理问题时,区域内材料必须是均质的。因此当所讨论的问题非均质性很强,以致必须使用大量的小均质区才能恰当模拟它,则 BEM 区域性边界格式就退化成整个体积剖分的格式了。在这种情况下 FEM 和 BEM 实际已无大的差别。

对于绝大多数工程实际问题,简便的边界离散必然得到比整个体积离散的任何计算格式要小得多的联立方程组。另一方面,用 BEM 形成的系统方程组,其系数矩阵是满阵;用 FEM 得到的矩阵虽大得多,却较为稀疏。在 BEM 解法中,矩阵元素分量的计算量要比 FEM 多得多,这抵消了降阶之后矩阵消元所能节省出的一部分时间。但是,随着问题规模的增大,用 BEM 求解时计算机费用的增长却比 FEM 要小得多。从各方面的研究来看,FEM 和 BEM 按同样精度求解三维问题时,其求解时间之比为 4:1 至 10:1。对于某些问题,这种差别可能还要大得多,例如:

(1) 具有无穷远边界的问题。由于 BEM 自动满足无穷远处的边界条件,不必在无穷远处划分单元;而 FEM 却必须用适当数量的远距离单元来

逼近无穷远边界。

(2) 含有自由面“卸载”区的半无限域情形。只要选用适当的奇异解与 BEM 配合，则大部分自由表面“卸载”区通常也不必作任何离散化处理。

用 BEM 求出边界的场量后，任何内点的场量即可由边界积分表达式得到。注意，用 BEM 所得的解在物体内部处处连续。与之对照，用 FEM 所得的解在物体内部一般是非连续的，并且与单元划分有关。对一般的 c^0 连续有限元，位移的连续性得到保证的，但应变、应力等由位移的一阶导数得到的场量在单元节点处于一般不再具有连续性(应力杂交元除外)。

边界积分方程是所讨论问题的一种精确提法，其误差仅来自离散化的处理。数值上的近似计算也只是因为在边界上无法求问题的封闭积分解而引起的。若采用相当成熟的数值积分法(如采用曲边元和边界上连续变化的函数分布)，则积分引起的误差可以很小；另外，数值积分比起数值微分来要稳定、精确得多。而 BEM 不必作任何数值微分。因此，在积分精度足够的前提下，BEM 的误差仅仅来源于结构的边界离散，而这一点又可以通过单元加密得到补偿。所以，BEM 的计算精度一般比有限元高得多^[35]。

2.2.2 弹性力学方程

为了建立物体弹性行为的边界元，我们首先简述一下弹性理论方程的要点。应力分量 σ_{ij} 必须在所考虑的区域 Ω 中满足平衡微分方程：

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (2-11)$$

其中， F_i 为作用在物体上的体力分量。求解上述场方程需要给定确定的边界条件：

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{在 } \Gamma_u \text{ 上} \quad (2-12)$$

$$t_i = \bar{t}_i \quad \text{在 } \Gamma_t \text{ 上} \quad (2-13)$$

其中， $t_i = \sigma_{ij}n_j$ 为作用在 n_j 方向的表面力， \bar{u}_i 和 \bar{t}_i 分别为边界 Γ_u 和 Γ_t 上事先给定的位移和力。 $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_t$ 为区域 Ω 的全部边界。应力分量 σ_{ij} 是对称的，即 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ 。

应变分量 ε_{ij} 和位移 u_i 的几何方程为：

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2-14)$$

其中，逗号(,)表示微分，即 $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$ 。线弹性材料的本构方程为：

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2-15)$$

其中， E_{ijkl} 为本构张量。式(2-11)~(2-15)概述了线性各向同性均匀弹性体的静力学方程。

2.2.3 基本解或开尔文解

在边界元公式中，基本解用于从弹性体积分方程中得到位移分量解。基本解指的是无限线性弹性固体在点载荷作用下的响应。考虑图 2-4 所示的一个无限区域，单位点载荷作用于源点 P ，下面寻求场点 Q 处的响应。星号(*)表示与基本解相关的物理量。将体力

$$F_i^* = \Delta(P,Q) \delta_{ij} e_j \quad (2-16)$$

代入式(2-11)中以得到基本解。这里 $\Delta(P,Q)$ 为 Dirac 函数， δ_{ij} 为 Kronecker 符号， e_j 为方向 j 的单位矢量。于是，位移基本解(开尔文解)可以表示为：

$$u_i^* = U_{ij}^*(P,Q) e_j \quad (2-17)$$

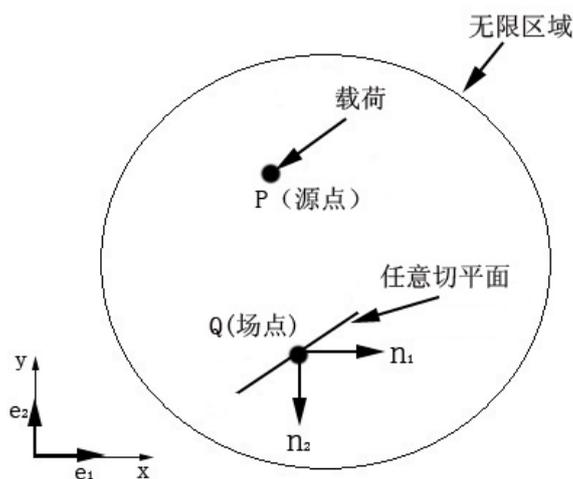


图 2-4 集中载荷作用下的无限区域^[36]

Fig.2-4 The infinite body enforced by a concentrated force

将式(2-17)代入(2-14)中, 并利用式(2-15)以及关系式 $t_i = \sigma_{ij}n_j$, 可得到面力的基本解(开尔文解)

$$t_i^* = T_{ij}(P, Q)e_j \quad (2-18)$$

其中, $U_{ij}^*(P, Q)$ 表示在点 P 处沿 i 方向的单位载荷作用下, 点 Q 沿 j 方向产生的位移。类似地, $T_{ij}(P, Q)$ 表示在点 P 处沿 i 方向的单位载荷作用下, 点 Q 沿 n_j 确定方位上的力。显然, $U_{ij}^*(P, Q)$ 和 $T_{ij}(P, Q)$ 在三维分析中可分别表示为一个 3×3 的矩阵。

2.2.4 边界元公式

得到边界元公式的出发点是用任意权函数 \bar{w}_i 乘以式(2-11)中的平衡方程并在所考虑的区域上积分, 即:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + F_i)\bar{w}_i d\Omega = 0 \quad (2-19)$$

利用乘积的微分法则, 有 $(\sigma_{ij}\bar{w}_i)_{,j} = \sigma_{ij,j}\bar{w}_i + \sigma_{ij}\bar{w}_{i,j}$, 则式(2-19)可写为:

$$\int_{\Omega} [(\sigma_{ij}\bar{w}_i)_{,j} - \sigma_{ij}\bar{w}_{i,j}]d\Omega + \int_{\Omega} F_i\bar{w}_i d\Omega = 0 \quad (2-20)$$

则我们可利用微积分散度定理化简式(2-20)中的第一项。具有分量 R_j 矢量场的散度定理为:

$$\int_{\Omega} R_{j,k} d\Omega = \int_{\Gamma} R_j n_k d\Gamma \quad (2-21)$$

其中, Γ 为体积 Ω 的表面, n_k 为表面 $d\Gamma$ 的外法线。令 $R_j = \sigma_{ij}\bar{w}_i$, 并将式(2-21)中的脚标 k 换为 j , 式(2-20)中积分的第一项可写为:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij}\bar{w}_i)_{,j} d\Omega = \int_{\Gamma} \sigma_{ij}\bar{w}_i n_j d\Gamma \quad (2-22)$$

由于 $t_i = \sigma_{ij}n_j$, 则上式可进一步简化为:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij}\bar{w}_i)_{,j} d\Omega = \int_{\Gamma} t_i \bar{w}_i d\Gamma \quad (2-23)$$

然后, 我们再来考察(2-20)中的第二项积分。由于应力分量 σ_{ij} 是对称的(即 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$), 被积函数的此项可写为:

$$\sigma_{ij}\bar{w}_{i,j} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}(\bar{w}_{i,j} + \bar{w}_{j,i}) \quad (2-24)$$

利用式(2-15)的本构关系 $\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ ，通过将权函数 \bar{w}_i 看作位移场，并使用应变—位移关系式(2-14)，记 $\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\bar{w}_{i,j} + \bar{w}_{j,i})$ ，得到：

$$\sigma_{ij}\bar{w}_{i,j} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}\bar{\varepsilon}_{ij} \quad (2-25)$$

应变场 ε_{kl} 可用其位移分量表示为 $\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k})$ ，同时利用本构张量的对称性 $E_{ijkl} = E_{klij}$ ，将其与应变 $\bar{\varepsilon}_{ij}$ 结合，可得 $\bar{\sigma}_{kl} = E_{klij}\bar{\varepsilon}_{ij}$ 。这样，所考虑的被积函数可写为：

$$\sigma_{ij}\bar{w}_{i,j} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k})\bar{\sigma}_{kl} \quad (2-26)$$

最后，利用 $\bar{\sigma}_{kl}$ 的对称性，式(2-26)可改写为：

$$\sigma_{ij}\bar{w}_{i,j} = u_{k,l}\bar{\sigma}_{kl} \quad (2-27)$$

为使此项可用散度定理，首先利用函数乘积的微分法重新改写此项。这样，式(2-20)中的第二项积分可表示为：

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}\bar{w}_{i,j} d\Omega = \int_{\Omega} [(\bar{\sigma}_{kl}u_k)_{,l} - \bar{\sigma}_{kl,l}u_k] d\Omega \quad (2-28)$$

对式(2-28)中右边的第一项应用散度定理，得到：

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}\bar{w}_{i,j} d\Omega = \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{kl}u_k n_l d\Gamma - \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{kl,l}u_k d\Omega \quad (2-29)$$

记 $\bar{t}_k = \bar{\sigma}_{kl}n_l$ ，注意到应力场 $\bar{\sigma}_{kl}$ 满足体力为 \bar{F}_k 时式(2-11)中的平衡方程，(即 $\bar{\sigma}_{kl,l} + \bar{F}_k = 0$)，式(2-29)可改写为：

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}\bar{w}_{i,j} d\Omega = \int_{\Gamma} \bar{t}_k u_k d\Gamma + \int_{\Omega} \bar{F}_k u_k d\Omega \quad (2-30)$$

将式(2-23)和式(2-30)代入式(2-20)，并重新整理，可以得到

$$\int_{\Gamma} \bar{t}_i \bar{w}_i d\Gamma + \int_{\Omega} \bar{F}_i \bar{w}_i d\Omega = \int_{\Gamma} \bar{t}_i u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \bar{F}_i u_i d\Omega \quad (2-31)$$

式(2-31)就是结构分析中所熟知的 Betti 互易定理。若干边界元公式就是以式(2-31)为出发点建立的。

在上面的讨论中，权函数 \bar{w}_i 为具有位移特征的任意函数，相应的应力、应变、面力和体力场分别记为 $\bar{\sigma}_{ij}$ ， $\bar{\varepsilon}_{ij}$ ， \bar{t}_i 和 \bar{F}_i 。现在选取权函数为基本位移解，即 2.2.3 中给出的单位载荷作用下无限弹性体的位移场。于是：

$$\bar{F}_i = F_i^* = \Delta(P, Q)\delta_{ij}e_j \quad (2-32a)$$

$$\bar{w}_i = u_i^* = U_{ij}^*(P, Q)e_j \quad (2-32b)$$

$$\bar{t}_i = t_i^* = T_{ij}^*(P, Q)e_j \quad (2-32c)$$

将这些关系式代入式(2-31)，并消去方程中的每一项 e_j ，得到：

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} t_i(Q)U_{ij}^*(P, Q)d\Gamma + \int_{\Omega} F_i(Q)U_{ij}^*(P, Q)d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} u_i(Q)T_{ij}^*(P, Q)d\Gamma + \int_{\Omega} u_i(Q)\Delta(P, Q)\delta_{ij}d\Omega \end{aligned} \quad (2-33)$$

式(2-33)就是著名的 Somigliana 恒等式，并已被作为若干边界元公式的出发点。

为了继续推导边界元公式，进一步详细考察式(2-33)右边的第二项。被积函数的 $\Delta(P, Q)$ 除点 P 外处处为零。利用图 2-5，积分可表示为：

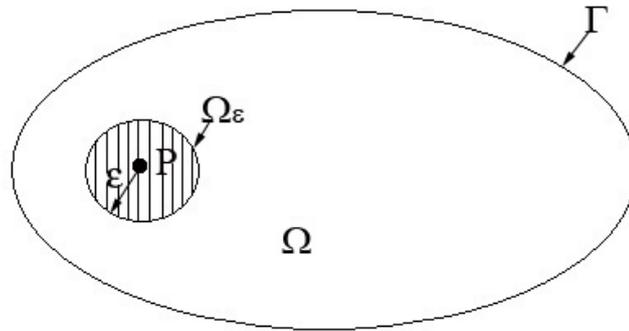


图 2-5 弹性体的区域和源点^[36]

Fig.2-5 The domain of a elastic body and the source point

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u_i(Q)\Delta(P, Q)\delta_{ij}d\Omega \\ &= \int_{\Omega - \Omega_\epsilon} u_i(Q)\Delta(P, Q)\delta_{ij}d\Omega + \int_{\Omega_\epsilon} u_i(Q)\Delta(P, Q)\delta_{ij}d\Omega \end{aligned} \quad (2-34)$$

其中, Ω_ε 为半径为 ε 且包含奇点 $r=0$ 的球。由于 $\Delta(P, Q)$ 在 $\Omega - \Omega_\varepsilon$ 中处处为零, 所以式(2-34)中右边第一项为零, 而第二项可表示为:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} u_i(Q) \Delta(P, Q) \delta_{ij} d\Omega = \varepsilon \delta_{ij} u_i(P) \quad (2-35)$$

其中, 当点 P 位于边界 Γ 外、区域 Ω 内或光滑边界 Γ 上时, ε 取值分别为 0, 1/2, 1。式(2-35)右边的项称为自由项。此时, 所研究的系统可由式(2-33)给出。考虑到式(2-35)中的关系, 式(2-33)中唯一包含体积分的项是由于体力 $F_i(Q)$ 引起的。为了得到仅含面积分的表达式, 考虑式(2-33)中没有体力 $F_i(Q)$ 的情形。由式(2-35)以及 $F_i(Q)=0$, 经重新整理, 式(2-33)可简化为:

$$\varepsilon \delta_{ij} u_i(P) = \int_{\Gamma} [t_i(Q) U_{ij}^*(P, Q) - u_i(Q) T_{ij}^*(P, Q)] d\Gamma(Q) \quad (2-36)$$

式(2-36)即为边界积分方程。它是边界元法的基础。在式(2-36)中, 不存在体积分, 只需计算面积分。从体积分到面积分(同理, 在二维情形中, 从面积分到线积分)使得系统维数降低一维, 在数值分析方面, 边界元的主要优势就在于此。

应注意到的是在此处忽略了体积力以得到式(2-36)的纯边界表示, 包含体积力将导致体积分的出现, 从而破坏式(2-36)的纯边界^[36]。

2.2.5 FRANC3D 软件简介

三维裂纹分析软件是美国康奈尔大学断裂力学工作组(Cornell Fracture Group, 简称为CFG)开发的一套具有建模、应力分析、应力强度因子计算、裂纹自动扩展等功能的免费软件。它是基于工作站的一套分析软件, 可以在包括Win98, WinNT/2000/XP, RedHet Linux, IBM AIX, Solaris, HP UNIX 在内的操作系统下运行^[37]。康奈大学断裂力学工作组(CFG)在断裂力学方面做了很多优秀的工作, 其典型成果见文献[38~45], 也可参看康奈尔大学断裂力学工作组的主页: www.cfg.cornell.edu。

断裂力学分析软件 FRANC3D 由三个部分组成: 立体对象建模器 OSM(Object Solid Modeler), 断裂分析器 FRANC3D(Fracture Analysis Code in 3 Dimensions)以及边界元系统 BES(Boundary Element System)。其功能特色如下:

2.2.5.1 立体对象建模器

立体对象建模器 OSM(Object Solid Modeler)是用来生成可以由

FRANC3D 读入的对象的几何描述。它相当于 FRANC3D 的前处理模块，是一个简单的面向对象的几何模型构造器，可以通过菜单和对话框进行操作。它由一个简单而易用的对象描述语言来存储对象的几何构形，文件扩展名为：`.mod`。和其他的对象建模器一样，它可以生成由点(point)、线(curve)、面(patch)构成的几何模型，支持包括平移(translate)、镜像(mirror)、拖扫(sweep)等操作。在视图上，可以进行图形的缩放、旋转、消隐等操作。和其他对象建模器唯一不同的是它的面具有方向性，即所有的面的方向必须指向它所围成体的外法向(除了内面没有方向性——interior patch)，这样才能构成一个封闭的体。

OSM 还具有转换有限元几何模型的功能，它可以把 ANSYS、SDRC-IDEAS、BLADE-GT、NASTRAN、PATRAN、ABAQUS、MARC K6、DIANA 的有限元模型转换为可以为 OSM 和 FRANC3D 读入的模型。这个功能可以减少我们的建模时间，直接把有限元几何模型转换为 `.mod` 格式即可^[46]。

2.2.5.2 断裂分析器 FRANC3D/BES

断裂分析器 FRANC3D 是整个系统的核心部分，它具有如下功能：

(1) 几何模型完善

对于从 OSM 读入的几何模型 FRANC3D 可以对之进行修改，比如增加点、线、面等。同时，FRANC3D 可以在模型中加入所需的裂纹。FRANC3D 具有很强的模拟裂纹的能力，可以生成多裂纹、非平面裂纹和任意形状的裂纹，这些裂纹可以是表面裂纹、内埋裂纹、交叉裂纹、不同材料交界处的裂纹甚至可以完全的不连续。对于一个裂纹的构型，可以有任意的裂纹前沿。FRANC3D 在生成裂纹时，用户可以通过菜单选择它自带的裂纹库，如椭圆裂纹、圆片裂纹、直裂纹等，也可以通过现有的几何元素(点、线)构成的面生成自己想要的裂纹。这种处理裂纹的方式是 FRANC3D 最具特色的一个优势。

在 FRANC3D 中可以给模型施加边界条件和材料常数。边界条件可以通过继承的方式传递给网格。

(2) 网格划分和求解

施加了边界条件、材料常数和生成了裂纹以后，我们便可以划分模型网格。由于 FRANC3D 是一个边界元分析系统，因而只有模型的表面和裂纹需要划分网格，而模型的内部并不需要划分。在划分网格之前，先把模型的边线分成若干段，这些小的线段确定了划分的单元尺寸。网格划分可以选择

四边形或三角形单元以及两者的组合。一般的划分可以分为自动划分 (automatic mesh)、映射划分(mapped mesh)等。对于划分好的网格可以进行局部重建。一般情况下, 裂纹区的网格需要划分的细一些, 并保持较好的长宽比(aspect ratio)。

在未完成工作的时候, 可以把正在建的模型或建好的模型保存为.fys 或.afys 的格式, 以便在下次工作时在 FRANC3D 中直接读出。

在完成网格划分之后, 就可以利用边界元求解系统 BES 进行计算求解。此时, 需要将模型的相关信息写入.bes 文件, 然后才能求解。边界元计算是整个分析中比较费时的, 除非计算机的配置很高, 比如内存在 2G 之上, 而此时主要耗时的工作便是建模, 一个网格良好的模型大约需要 1 小时的工作量。当在 Redhat Linux 系统下使用 3G 内存, 而 CPU 为 AMD Athlon(tm) 64 3500+ Processor(90nm)计算机时计算一个 7000 个单元、18000 阶方程的模型大约需要将近两个小时。

需要指出的是, 使用边界元求解系统 BES 进行计算求解对内存的要求是很高的。

BES 求解器有 QR 分解法、Gauss 消元法、迭代法, 用户可以根据需要选择相应的求解器。

同时, 用户还可以根据问题的规模选择使用内存(in core)或者外部计算方式(out of core)来计算, 甚至可以使用 BES 的并行计算程序进行并行计算 [47,48]。

2.2.5.3 应力强度因子计算和裂纹自动扩展

FRANC3D 中应力强度因子是通过位移的相关技术得到的, 通过裂纹张开或滑动(opening and sliding)位移计算。对于 I 型裂纹使用裂纹张开位移(COD—Crack Opening Displacement)计算 I 型裂纹应力强度因子, 对于 II 型裂纹使用裂纹滑动位移(CSD—Crack Sliding Displacement)来计算 II 型裂纹应力强度因子, 对于 III 型裂纹使用裂纹撕裂位移(CTD—Crack Tearing Displacement)来计算 III 型裂纹应力强度因子。应力强度因子可以通过裂纹前沿单元的节点位移得到, 也可以通过一个距离裂纹前沿一个固定值得到。它们得出的结果通常是一致的。FRANC3D 可以一次性地得到一个对象内所有裂纹的应力强度因子值, 并给出相应的曲线, 这便给用户带来了极大的方便。

FRANC3D 最大的特色是能够模拟裂纹的自动扩展。众所周知, 三维断裂力学的复合型断裂的判据到目前还不成熟。复合型断裂的研究还普遍停留

在二维水平(I型和II型混合)。由此产生了一系列理论,如最大周向应力理论、最大应变能释放率理论、应变能密度因子理论或 S 准则。FRANC3D使用以上断裂判据确定裂纹的扩展方向,而裂纹的最大扩展尺寸由用户自己确定。裂纹前沿被离散成许多点,使用二维平面应变方程确定这些点的扩展方向,它们的扩展尺寸则由各点相对应应力强度因子的大小和用户自己确定的最大扩展尺寸共同确定。这些扩展后的点连线后重新组成新的裂纹面。用户可以重新分析扩展后裂纹前沿的应力强度因子分布情况。FRANC3D还有一个优点就是,在裂纹扩展后,只需对很小的一部分区域重新划分网格,这大大减少了网格划分的时间。

FRANC3D还可以使用应力强度因子历史和材料常数预测疲劳裂纹的寿命^[37]。

2.3 本章小结

本章首先简要概述了线弹性断裂力学的基本概念和理论,并重点讨论了应力强度因子在断裂分析中的重要作用,同时结合三维裂纹理论给出了应力强度因子的求解方法。

然后介绍了边界元法的基本概念,并比较了几种数值解法的优缺点。

最后,简要地介绍了本文计算所采用的计算软件 FRANC3D。

第3章 无限大体中的表面缺陷裂纹

3.1 计算模型的选取

基于工程实际问题的一种抽象，本文的计算模型的选取如图 3-1。图中 H 为裂纹体的半长，即裂纹体长为 $2H$ ； r 为半球形表面缺陷的半径； R 为半球形表面缺陷作用下表面裂纹的半径； t 为裂纹体的厚度； W 为裂纹体的半宽，即裂纹体宽为 $2W$ 。

数值计算中，单向拉伸载荷施加于三维裂纹体长度方向两端的两个自由表面上，即施加垂直于裂纹面方向的单向拉伸载荷： $\sigma = 100 \text{ MPa}$ ，采用各向同性线弹性均质材料，其属性为： $E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$ ， $\nu = 0.3$ 。

工程结构中的裂纹在刚开始的时候都是很小的，即构件的几何尺寸远远大于裂纹的几何尺寸，此时的裂纹问题即为无限大体中的裂纹问题。本章所要讨论的无限大体中的裂纹即：半球形表面缺陷的几何尺寸 r 或表面裂纹的几何尺寸 R 与裂纹体的几何尺寸 t 相比时很小(即 r/t 或 R/t 很小)。

本章将在计算结果的基础上给出无限大体和有限大体的界限。限于时间，本文只考虑下边界的影响，即考虑厚度对应力强度因子的影响，而令裂纹体的另外两个几何尺寸足够大。由厚度确定无限大体与有限大体即当 R/t 小于某个数值时我们将问题归为无限大裂纹问题，而 R/t 大于该数值时我们就应考虑裂纹体边界的影响，而把它归为有限大体中的裂纹问题。

另外，为了讨论表面缺陷对应力强度因子的影响，我们首先计算半圆形表面裂纹的应力强度因子，并以此为参照考虑半球形表面缺陷对应力强度因子的影响。

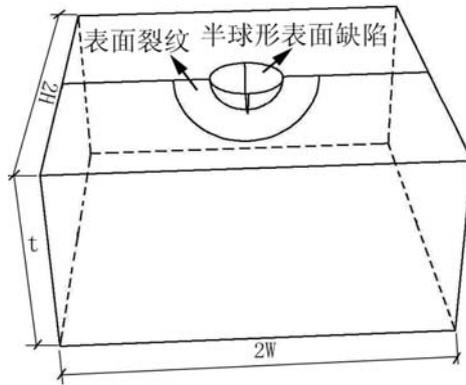
3.2 半圆形表面裂纹

参考 Newman^[15]半椭圆表面裂纹计算模型的选取，我们首先选取两组模型(图 3-1)：

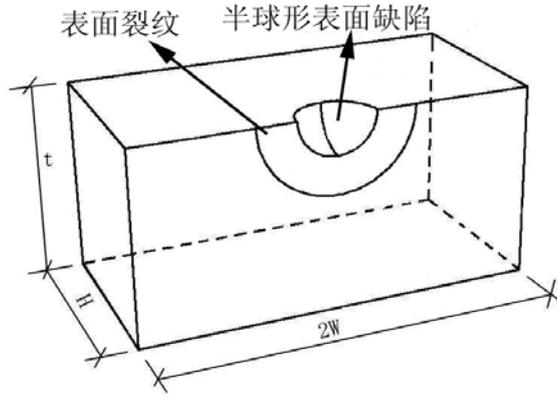
$$(1) R/t = 0.1, R/W = 0.1 \text{ 且 } R/H = 0.1$$

$$(2) R/t = 0.2, R/W = 0.2 \text{ 且 } R/H = 0.2$$

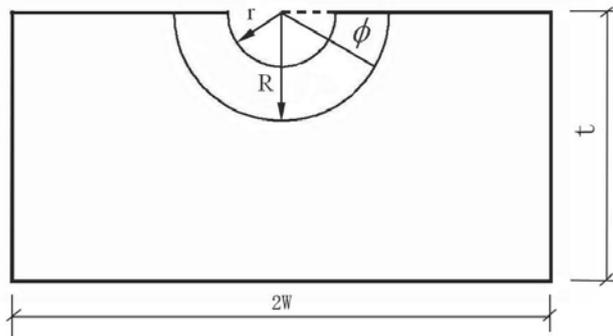
为了讨论的方便，我们记半圆形表面裂纹无量纲化的应力强度因子为 K_{sc} ，则 $K_{sc} = K_1 / (\sigma \sqrt{\pi a / Q})$ (Q 为椭圆形裂纹的形状函数，对本文的半圆形



a) 半球形表面缺陷及其衍生的裂纹
a) Cracks emanating from a surface semi-spherical cavity



b) 裂纹体的 1/2 计算模型
b) Local view of the calculated model (a half of Fig.(a))



c) 裂纹面所在的中截面
c) The symmetry plane in which the crack surface occurs

图 3-1 计算模型的示意图
Fig.3-1 Schematic diagram for the calculated model

表面裂纹 $Q = \pi^2/4$)。在以后的章节中如果不加特殊说明应力强度因子的无量纲化均与此处相同。上述模型的计算结果和两个模型间的相对误差以及和文献[15]结果的比较见表 3-1。

表 3-1 中, 误差 I 为模型(1)与模型(2)间的误差, 误差 II 为模型(2)与 Newman 结果的误差。另外需要指出的是, 由于给出的应力强度因子为无量纲化的, 而 $2\phi/\pi$ 为裂尖距离裂纹与上表面交点的单位化距离, 即亦为无量纲的, 同理还有今后的章节中的 r/t , R/t 均为无量纲的, 则在相关的图与表中的坐标中没有列出单位。

表 3-1 两组模型的无量纲化计算结果和误差分析

Table 3-1 The computed and normalized results of two selected models of semi-circular crack and their relative errors

$2\phi/\pi$	模型(1)	模型(2)	误差 I(%)	Newman 结果 ^[15]	误差 II(%)
0	1.231	1.251	1.61	1.174	6.56
0.125	1.164	1.185	1.82	1.145	3.49
0.25	1.115	1.137	1.92	1.105	2.85
0.375	1.082	1.101	1.78	1.082	1.79
0.5	1.064	1.082	1.69	1.067	1.37
0.625	1.059	1.077	1.64	1.058	1.75
0.75	1.064	1.081	1.65	1.053	2.68
0.875	1.068	1.084	1.45	1.050	3.24
1	1.059	1.075	1.51	1.049	2.51

从表 3-1 中我们可以看出两组模型的计算误差在 2%以内, 所以我们可以取模型(2)即 $R/t=0.2$, $R/W=0.2$ 且 $R/H=0.2$, 作为无限大体。同时我们也可以看出采用模型(2)计算时的误差与 Newman^[15]的结果比较起来总的来说是比较小的。但在 $2\phi/\pi=0$ 处(即裂纹前沿与上自由表面相交处)误差较大。该处发生较大的误差是由于采用平面应变假设所造成的^[15], 因为该点位于自由表面上, 所以按照平面应力假设计算更为合理。我们采用平面应力假设时, 使用该点的裂纹张开位移(COD)计算所得到的无量纲化的应力强度因子为 1.131, 与 Newma 结果相比的误差为 3.663%。

在以后的章节中我们将采用模型(2)中 $2\phi/\pi=0$ 点的应力强度因子作为参考, 以讨论半球形表面缺陷对应力强度因子的影响, 方便起见我们用 K_{SCm} 表示该点无量纲化的应力强度因子($K_{SCm}=1.251$)。

3.3 表面缺陷裂纹问题无限大体的确定

为了确定半球形表面缺陷影响下表面裂纹裂纹体有限大和无限大的界限，我们同样在参考 Newman 模型选取的经验上选取几组模型进行计算：

- (1) $R/t = 0.125$ ， $R/W = 0.2$ 且 $R/H = 0.2$
- (2) $R/t = 0.2$ ， $R/W = 0.125$ 且 $R/H = 0.125$
- (3) $R/t = 0.2$ ， $R/W = 0.2$ 且 $R/H = 0.2$

相应无量纲化应力强度因子(方便起见我们记表面缺陷影响下裂纹的应力强度因子为 K_{CV} ，即 $K_{CV} = K_I / (\sigma \sqrt{\pi a/Q})$)的计算结果以及它们之间的误差见表 3-2。

表 3-2 中，误差 I 为模型(3)与模型(1)间的误差，误差 II 为模型(3)与模型(2)结果的误差。

表 3-2 三组计算模型的计算结果和误差分析

Table 3-2 The computed K_{CV} of three selected models and their relative errors

$2\phi/\pi$	模型(1)	模型(2)	模型(3)	误差 I(%)	误差 II(%)
0	1.378	1.366	1.383	0.351	1.222
0.125	1.223	1.213	1.224	0.159	0.912
0.25	1.178	1.169	1.180	0.160	0.951
0.375	1.161	1.152	1.163	0.167	0.951
0.5	1.152	1.143	1.154	0.167	0.920
0.625	1.145	1.137	1.147	0.163	0.888
0.75	1.139	1.131	1.141	0.159	0.863
0.875	1.135	1.127	1.136	0.153	0.846
1	1.131	1.123	1.133	0.150	0.839

从表 3-2 中我们可以看出模型(3)： $R/t=0.2$ ， $R/W=0.2$ 且 $R/H=0.2$ 的计算结果与模型(1)和模型(2)的计算结果比较起来误差在 1.3%以内，所以当 $R/t \leq 0.2$ ， $R/W \leq 0.2$ 且 $R/H \leq 0.2$ 时我们可以认为裂纹体为无限大，而 $R/t > 0.2$ ， $R/W > 0.2$ 且 $R/H > 0.2$ 时我们则需考虑边界的影响，即视之为有限体。同时也可以看出，裂纹前沿应力强度因子随着 $2\phi/\pi$ 的增大而减小，即与无表面缺陷时的规律一致。

3.4 无限大裂纹体中的应力强度因子

为了考虑无限大裂纹体中半球形表面缺陷对表面裂纹应力强度因子的影

响，我们在保证 $R/t \leq 0.2$ ， $R/W \leq 0.2$ 且 $R/H \leq 0.2$ 的情况下选取了以下模型进行了计算：

$$R/r = 1.2, 1.24, 1.4, 1.6, 1.8, 2, 3, 4, 5.5$$

因为 $2\phi/\pi = 0$ 处的应力强度因子(记为 K_{CVm})为裂纹前沿中应力强度因子最大的位置，所以此时我们仅仅考察 K_{CVm} 随表面裂纹半径与半球形表面缺陷半径之比 R/r 变化的规律。 K_{CVm} 的计算结果以及此结果与无限大裂纹体中半圆形表面裂纹无量纲化应力强度因子 K_{SCm} 的比值见表 3-3。

从表 3-3 中我们不难给出相应曲线，见图 3-2。

方便讨论起见，我们定义几个参数：记 $a = R/r$ ， $K_{SCm} = K_{CVm}$ 时的 R/r 为 a_1 ($a_1 \approx 1.351$)，详见图 3-2。

表 3-3 计算所得到的 K_{CVm} 在 R/r 变化下的计算结果

Table 3-3 The calculated K_{CVm} for ratios of R/r

R/r	K_{CVm}	K_{CVm} / K_{SCm}
5.5	1.263	1.010
4	1.269	1.014
3	1.289	1.030
2.5	1.317	1.053
2	1.383	1.106
1.8	1.367	1.093
1.6	1.342	1.073
1.4	1.280	1.023
1.24	1.186	0.948
1.2	1.186	0.948

从图 3-2 中，我们可以看出：

(1) 当 $a \leq 2$ 时， K_{CVm} 随着 a 的增大而增大。最大的应力强度因子发生在 $a = 2$ 处。

(2) 当 $a > 2$ 时， K_{CVm} 随着 a 的增大而减小。当 $a = 5.5$ 时 K_{CVm} 仅为 K_{SCm} 的 1.01 倍，即它们的相对误差为 1%，这说明了当 $a \geq 5.5$ 时，我们可以忽略半球形表面缺陷对应力强度因子的影响。

(3) 存在一个 a_1 使得 $K_{CVm} = K_{SCm}$ ，即此时半球形表面缺陷影响下表面裂纹的最大应力强度因子与无半球形表面缺陷时表面裂纹的最大应力强度因子相等。

(4) $a < a_1$ 时， $K_{CVm} < K_{SCm}$ 。即半球形表面缺陷的存在使表面裂纹的应力强度因子有所降低(与无半球形表面缺陷比较而言)，也即此时半球形表面

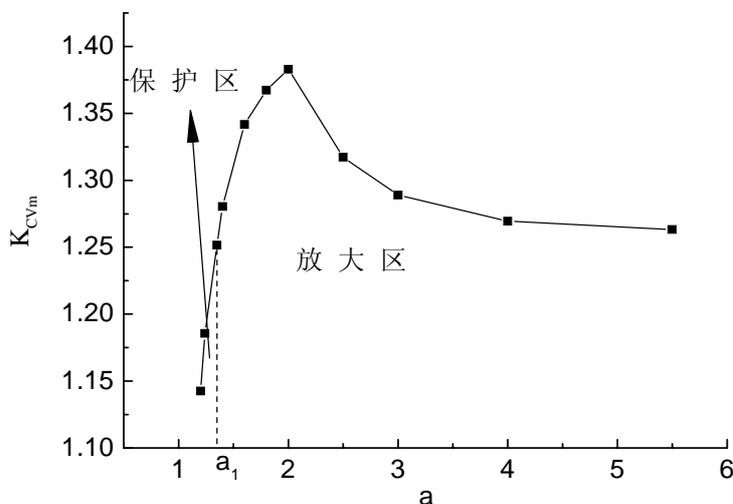


图 3-2 K_{CVm} 随 a 的变化规律

Fig.3-2 Variations of K_{CVm} with ratios of (a)

缺陷的存在对裂纹存在一个屏蔽(shielding)作用，而使结构变得安全。

(5) 当 $a > a_1$ 时， $K_{CVm} > K_{SCm}$ 。即半球形表面缺陷的存在对表面裂纹的应力强度因子起到放大作用(amplifying)，而使结构变得更加危险。当 $a = 2$ 时， $K_{CVm} = 1.106K_{SCm}$ ，即最大的放大系数为 1.106。

这些结论与二维问题中闫相桥^[49]的研究结果是一致的。图 3-3 至图 3-5 是计算模型的相关示意图。

3.5 本章小结

本章首先讨论了具有半圆形表面裂纹线弹性体的应力强度因子，计算结果与文献相比误差较小，并且通过计算结果给出含半圆形表面裂纹裂纹体无限大和有限大的界限。

然后又由计算结果给出半球形表面缺陷影响下具有表面裂纹的线弹性体有限大与无限大的界限：当 $R/t \leq 0.2$ ， $R/W \leq 0.2$ 且 $R/H \leq 0.2$ 时我们可以认为裂纹体为无限大，而 $R/t > 0.2$ ， $R/W > 0.2$ 且 $R/H > 0.2$ 时我们视之为有限裂纹体。同时发现，裂纹尖端的应力强度因子随着 $2\phi/\pi$ 的增大而减小。

同时给出无限大体中应力强度因子随表面裂纹半径与半球形缺陷半径之比 a 的变化规律。

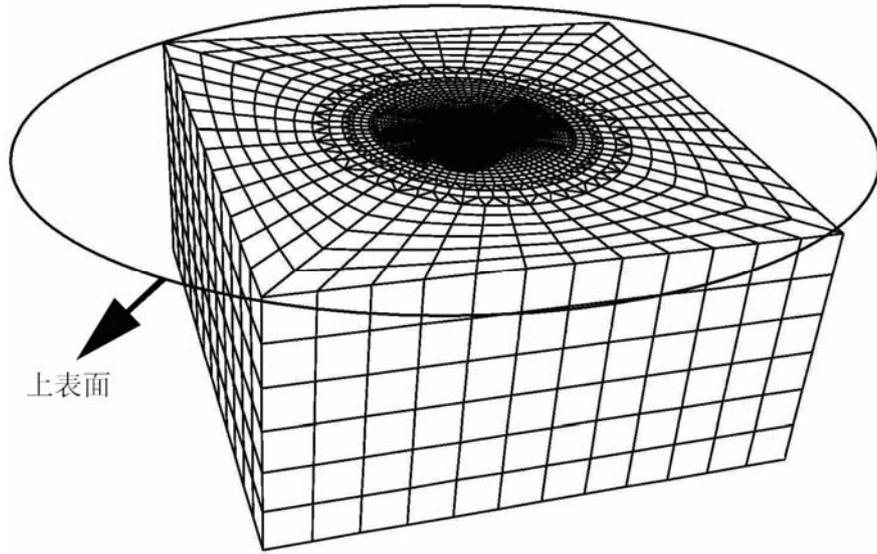


图 3-3 半球形表面缺陷影响下含表面裂纹三维体的单元形式

Fig.3-3 Element pattern of the cracked body by influence of the surface semi-spherical cavity and surface crack

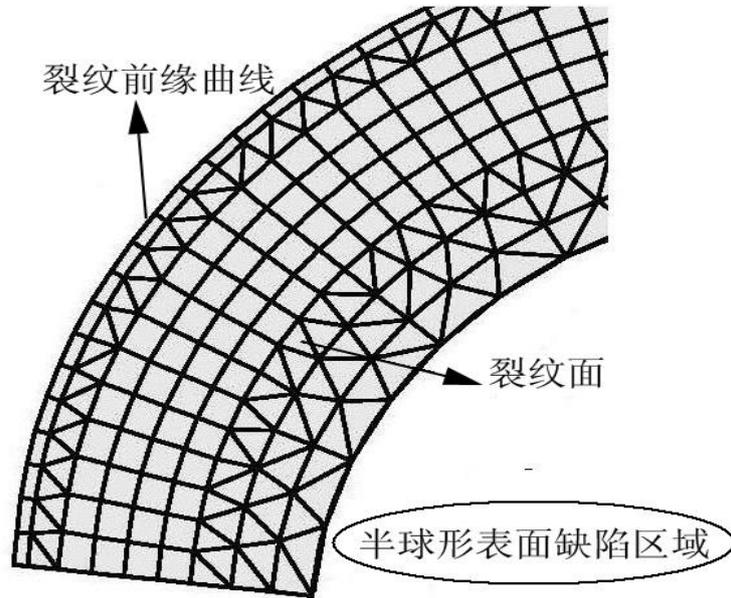
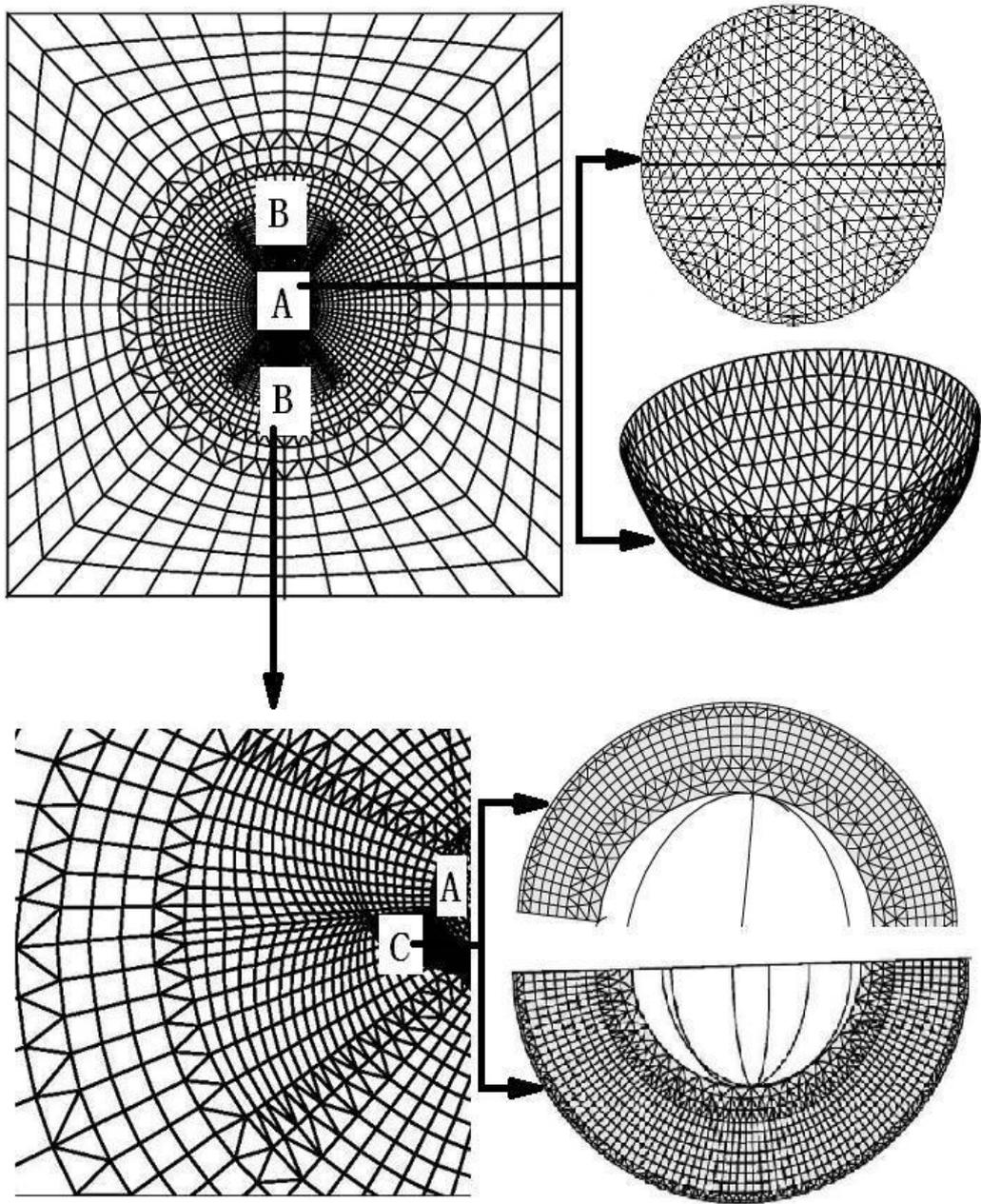


图 3-4 裂纹面单元形式

Fig.3-4 Element pattern of the crack surface



A--半球形表面缺陷
B--裂纹面与上表面交界处
C--裂纹面

图 3-5 上表面及相关区域单元形式

Fig.3-5 Element pattern of the upper surface and the related regions

(1) 当 $a > 2$ 时, K_{CVm} 随着 a 的增大而减小。当 $a = 5.5$ 时 K_{CVm} 仅为 K_{SCm} 的 1.01 倍, 即它们的相对误差为 1%, 这说明了当 $a \geq 5.5$ 时, 我们可以忽略表面半球形缺陷对应力强度因子的影响。

(2) 存在一个 a_1 使得 $K_{CVm} = K_{SCm}$, 即此时半球形表面缺陷影响下表面裂纹的最大应力强度因子与无半球形表面缺陷时表面裂纹的最大应力强度因子相等。

(3) 当 $a < a_1$ 时, $K_{CVm} < K_{SCm}$ 。即半球形表面缺陷的存在使表面裂纹的应力强度因子有所降低, 也即此时半球形表面缺陷的存在对裂纹存在一个屏蔽(shielding)作用, 而使结构变得安全。

(4) 当 $a > a_1$ 时, $K_{CVm} > K_{SCm}$ 。即半球形表面缺陷的存在对表面裂纹的应力强度因子起到放大作用(amplifying), 而使结构变得更加危险。当 $a = 2$ 时, $K_{CVm} = 1.106K_{SCm}$, 即最大的放大系数为 1.106。

第4章 有限大体中的表面缺陷裂纹

4.1 引言

工程中的结构总是有限的，所以研究有限体的表面裂纹将更有工程实际意义。但是，对于有限体，所有的分析几乎都要求助于数值方法^[50]。本章将在寻求到无限大体应力强度因子之后深入研究有限大体的应力强度因子，并进而揭示有限大体的几何尺寸对应力强度因子的影响。

4.2 模型选取和计算结果

为了分析裂纹体几何尺寸以及表面缺陷对应力强度因子的影响(本文中裂纹体的几何尺寸仅考虑厚度 t 的影响，表面缺陷即半球形表面缺陷，其半径为 r)，我们选取并计算了如下的一组模型(为了讨论方便我们一并给出两组无限大体中的计算结果)：

$$r/t=0.1,0.2,0.4,0.5,0.6,0.8$$

并在可能的情况下取 $a=1.2,1.4,1.6,1.8,2.0$ 。

计算所得到的数据见表 4-1 至表 4-6。

为了分析应力强度因子 K_I 随 a 以及 r/t 的变化趋势，我们可以对表 4-1 至表 4-6 中的数据进行深入分析。

表 4-1 $r/t=0.1$ 时计算所得的 K_{CV}

Table 4-1 The calculated K_{CV} when $r/t=0.1$

$2\phi/\pi$	a				
	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
0.0	1.144	1.280	1.342	1.367	1.383
0.125	1.037	1.161	1.188	1.205	1.225
0.250	1.019	1.127	1.148	1.162	1.180
0.375	1.011	1.114	1.133	1.147	1.163
0.50	1.005	1.108	1.126	1.138	1.154
0.625	1.000	1.103	1.120	1.132	1.147
0.750	0.995	1.099	1.115	1.127	1.141
0.875	0.991	1.095	1.111	1.123	1.136
1.0	0.988	1.091	1.107	1.119	1.132

表 4-2 $r/t = 0.2$ 时计算所得的 K_{CV}

Table 4-2 The calculated K_{CV} when $r/t = 0.2$

$2\phi/\pi$	a				
	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
0.0	1.161	1.313	1.383	1.419	1.449
0.125	1.050	1.183	1.223	1.247	1.277
0.250	1.032	1.146	1.178	1.199	1.224
0.375	1.024	1.131	1.161	1.179	1.201
0.50	1.017	1.123	1.152	1.168	1.187
0.625	1.012	1.116	1.144	1.159	1.177
0.750	1.006	1.110	1.138	1.152	1.168
0.875	1.000	1.106	1.133	1.147	1.162
1.0	0.995	1.101	1.128	1.143	1.157

表 4-3 $r/t = 0.4$ 时计算所得的 K_{CV}

Table 4-3 The calculated K_{CV} when $r/t = 0.4$

$2\phi/\pi$	a				
	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
0.0	1.233	1.428	1.544	1.628	1.670
0.125	1.109	1.275	1.348	1.404	1.469
0.250	1.082	1.222	1.280	1.324	1.374
0.375	1.068	1.196	1.245	1.281	1.319
0.50	1.058	1.179	1.222	1.250	1.282
0.625	1.049	1.166	1.204	1.227	1.254
0.750	1.041	1.155	1.190	1.209	1.232
0.875	1.035	1.147	1.179	1.195	1.214
1.0	1.029	1.140	1.170	1.185	1.200

4.3 表面缺陷对应力强度因子的影响

为了研究半球形表面缺陷对应力强度因子的影响，我们可以把裂纹半径与半球形表面缺陷半径之比 a 作为参数进行分析。

首先考虑裂纹前沿应力强度因子在 r/t 特定的情况下随 a 的变化，根据表 4-1 至表 4-6 中的数据我们可以给出如图 4-1 至 4-6 曲线。

从图 4-1 至图 4-6 中我们可以清楚地看到，应力强度因子的最大值也都发生在裂纹前沿曲线与自由表面相交点，即发生在 $2\phi/\pi = 0$ 处(我们仍记此处的应力强度因子为 K_{CVm})。应力强度因子 K_{CV} 在 r/t 相同的情况下基本

表 4-4 $r/t = 0.5$ 时计算所得的 K_{CV}

Table 4-4 The calculated K_{CV} when $r/t = 0.5$

$2\phi/\pi$	a				
	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
0.0	1.287	1.507	1.641	1.731	—
0.125	1.143	1.331	1.415	1.478	—
0.250	1.110	1.265	1.333	1.383	—
0.375	1.094	1.232	1.289	1.329	—
0.50	1.081	1.210	1.257	1.286	—
0.625	1.071	1.193	1.231	1.249	—
0.750	1.063	1.180	1.211	1.215	—
0.875	1.056	1.169	1.193	1.184	—
1.0	1.051	1.160	1.179	1.155	—

表 4-5 $r/t = 0.6$ 时计算所得的 K_{CV}

Table 4-5 The calculated K_{CV} when $r/t = 0.6$

$2\phi/\pi$	a				
	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
0.0	1.346	1.587	1.664	—	—
0.125	1.188	1.391	1.428	—	—
0.250	1.146	1.312	1.337	—	—
0.375	1.123	1.269	1.279	—	—
0.50	1.107	1.237	1.228	—	—
0.625	1.095	1.211	1.180	—	—
0.750	1.086	1.188	1.134	—	—
0.875	1.078	1.169	1.089	—	—
1.0	1.072	1.152	1.046	—	—

上是随着 a 的增大而增大的，但是当 $r/t \geq 0.5$ 时裂纹前沿靠近下表面的裂尖出现应力强度因子随着 a 的增大而减小的情况，见图 4-4 和图 4-5。比较无限大体中应力强度因子随 a 的变化规律(图 4-1)，可发现这是由于裂纹前沿距离下自由表面较近所造成的，详细的分析将在第五章中进行。

由于应力强度因子的最大值发生在 $2\phi/\pi = 0$ 处，则我们可以根据表 4-1 至 4-6 中 $2\phi/\pi = 0$ 处的应力强度因子值 K_{CVm} 很容易地给出 K_{CVm} 随 a 的变化规律，见图 4-7。

从图 4-7 中可以看出， K_{CVm} 在 r/t 相同的情况下都随着 a 的增大而增

大。即有限体中结构的危险性随着裂纹半径的增大而增大。

表 4-6 $r/t = 0.8$ 时计算所得的 K_{CV}

Table 4-6 The calculated K_{CV} when $r/t = 0.8$

$2\phi/\pi$	a				
	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
0.0	1.349	—	—	—	—
0.125	1.226	—	—	—	—
0.250	1.175	—	—	—	—
0.375	1.142	—	—	—	—
0.50	1.109	—	—	—	—
0.625	1.069	—	—	—	—
0.750	1.021	—	—	—	—
0.875	0.975	—	—	—	—
1.0	0.970	—	—	—	—

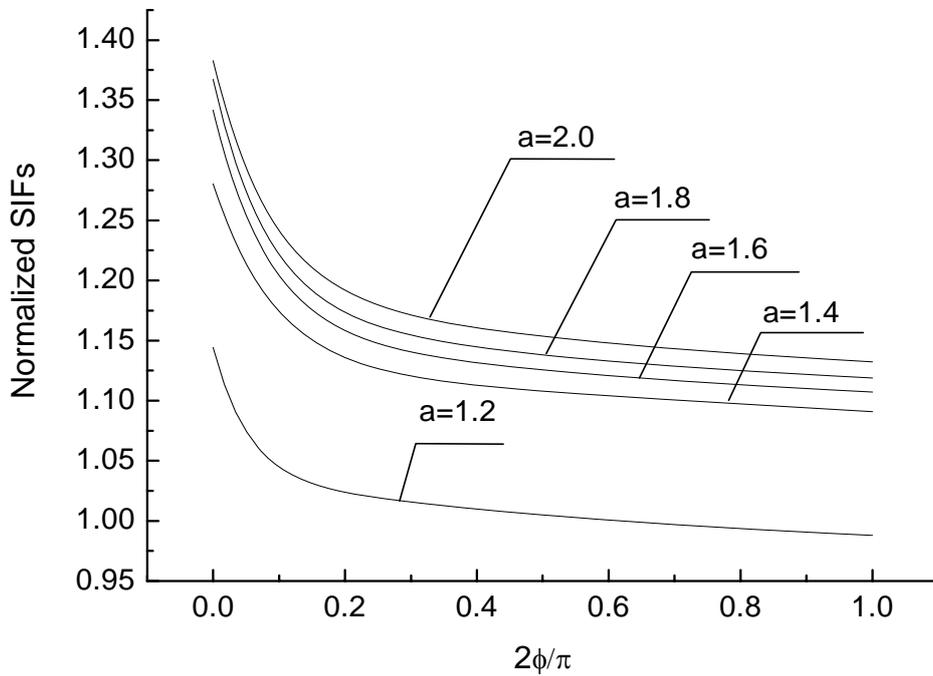


图 4-1 $r/t = 0.1$ 时裂纹前沿无量纲化的应力强度因子 K_{CV}

Fig.4-1 Distribution of Normalized SIFs (K_{CV}) along the crack front when $r/t = 0.1$

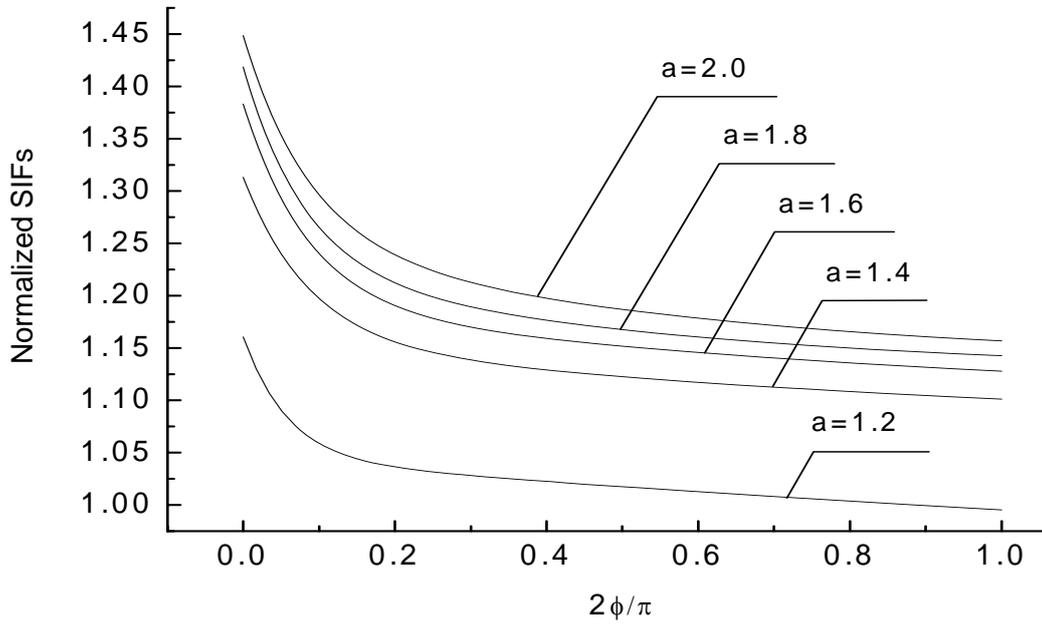


图 4-2 $r/t = 0.2$ 时裂纹前沿无量纲化的应力强度因子 K_{CV}

Fig.4-2 Distribution of Normalized SIFs (K_{CV}) along the crack front when $r/t = 0.2$

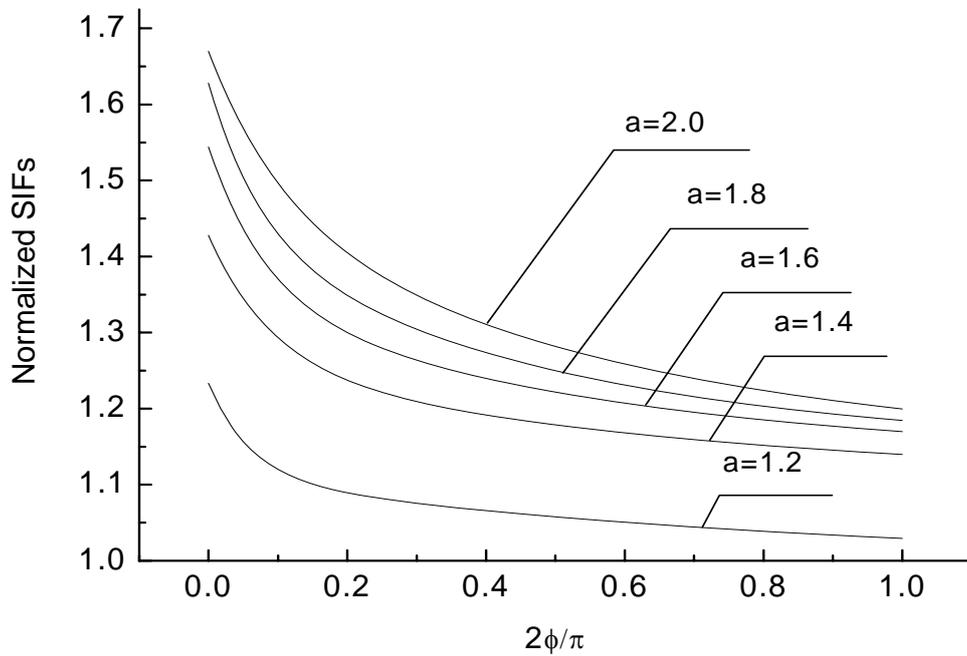


图 4-3 $r/t = 0.4$ 时裂纹前沿无量纲化的应力强度因子 K_{CV}

Fig.4-3 Distribution of Normalized SIFs (K_{CV}) along the crack front when $r/t = 0.4$

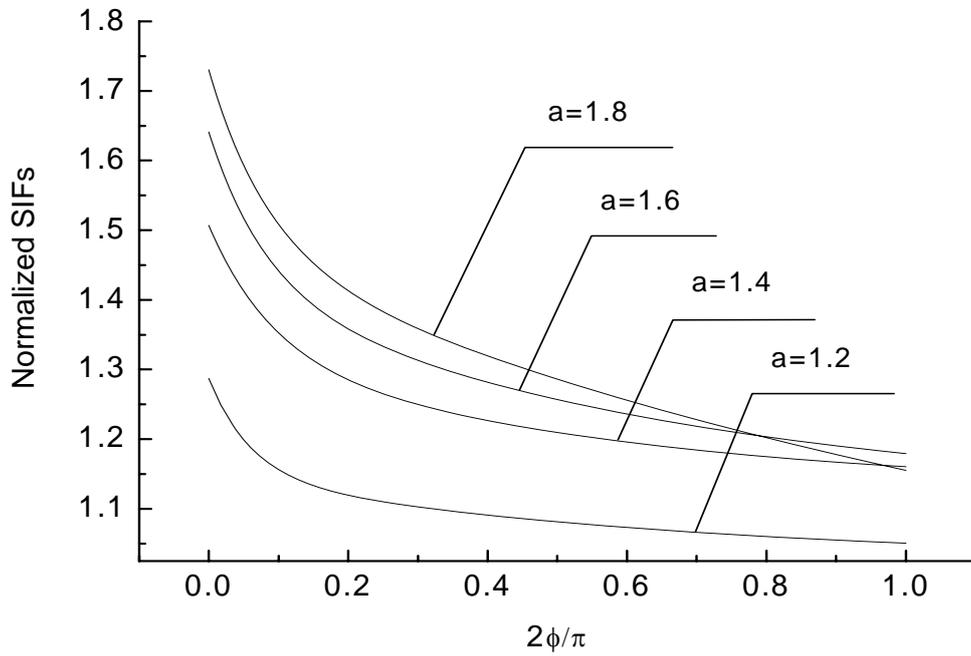


图 4-4 $r/t=0.5$ 时裂纹前沿无量纲化的应力强度因子 K_{CV}

Fig.4-4 Distribution of Normalized SIFs (K_{CV}) along the crack front when $r/t=0.5$

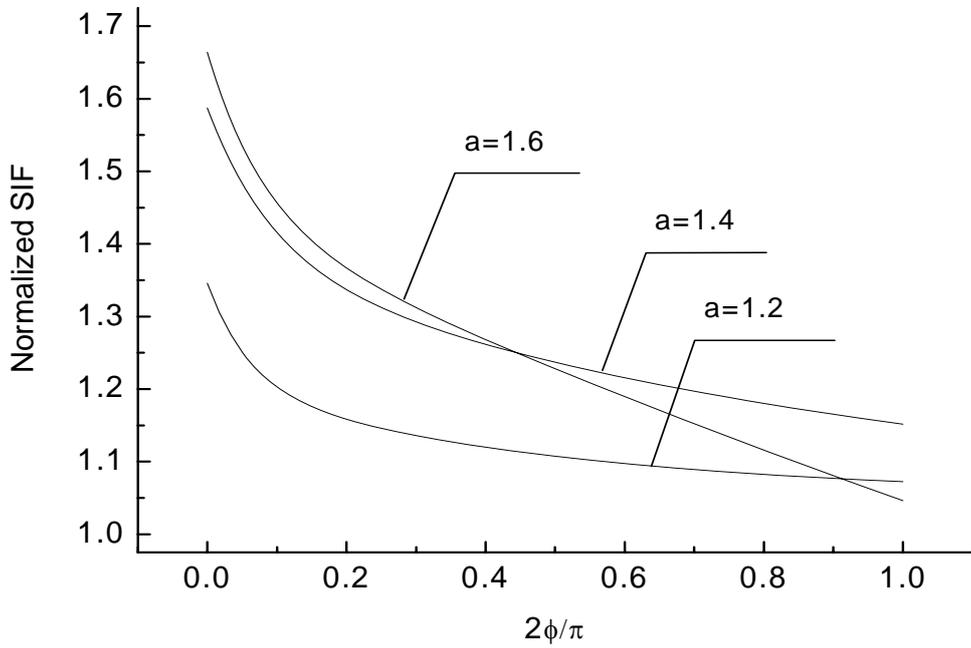


图 4-5 $r/t=0.6$ 时裂纹前沿无量纲化的应力强度因子 K_{CV}

Fig.4-5 Distribution of Normalized SIFs (K_{CV}) along the crack front when $r/t=0.6$

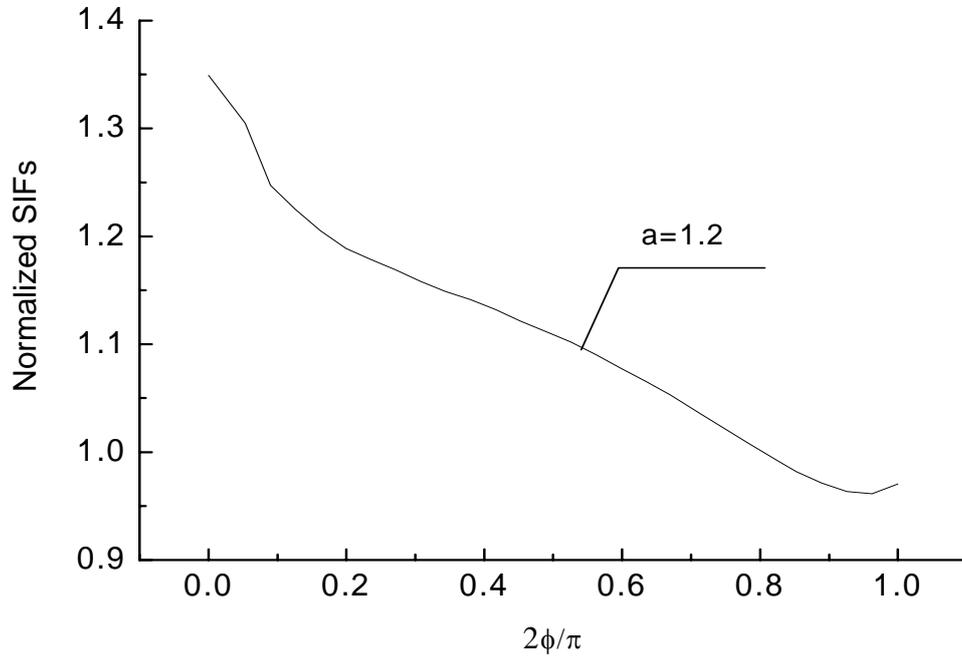


图 4-6 $r/t = 0.8$ 时裂纹前沿无量纲化的应力强度因子 K_{CV}

Fig.4-6 Distribution of Normalized SIFs (K_{CV}) along the crack front when $r/t = 0.8$

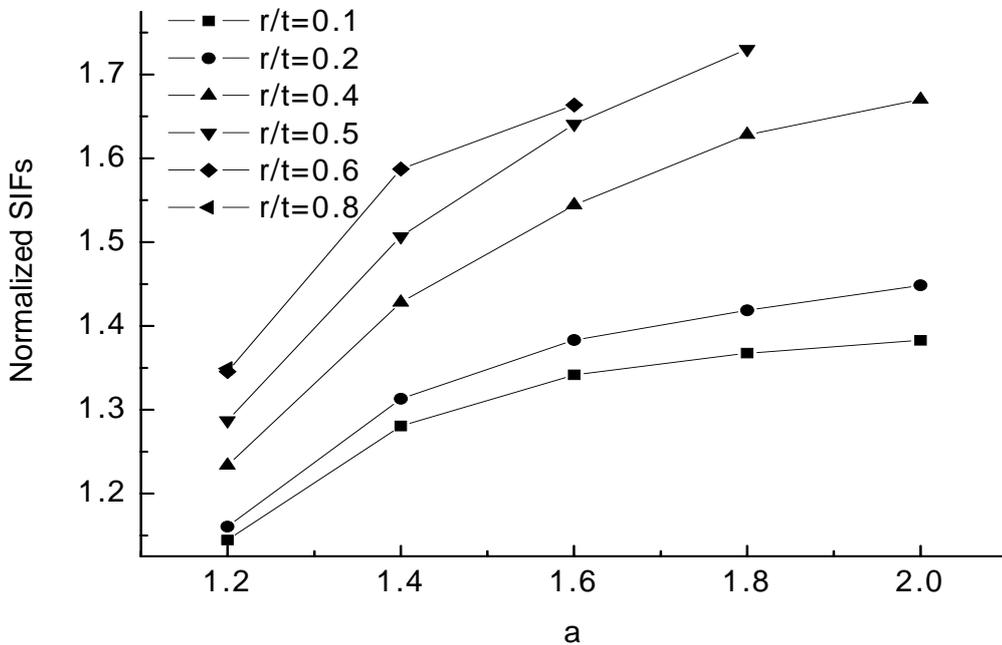


图 4-7 裂纹尖端无量纲化的 K_{CVm} 随 a 的变化

Fig.4-7 Variation of Normalized SIFs (K_{CVm}) with ratio of (a) in different ratios of (r/t)

4.4 裂纹体厚度对应力强度因子的影响

为了考察裂纹体厚度对应力强度因子的影响，我们可以选取半球形表面缺陷半径与裂纹体厚度之比 r/t 作为横坐标，以裂纹尖端最大的应力强度因子 K_{CVm} 作为纵坐标，分析表 4-1 至 4-6 中的数据，我们可以很容易的给出图 4-8。

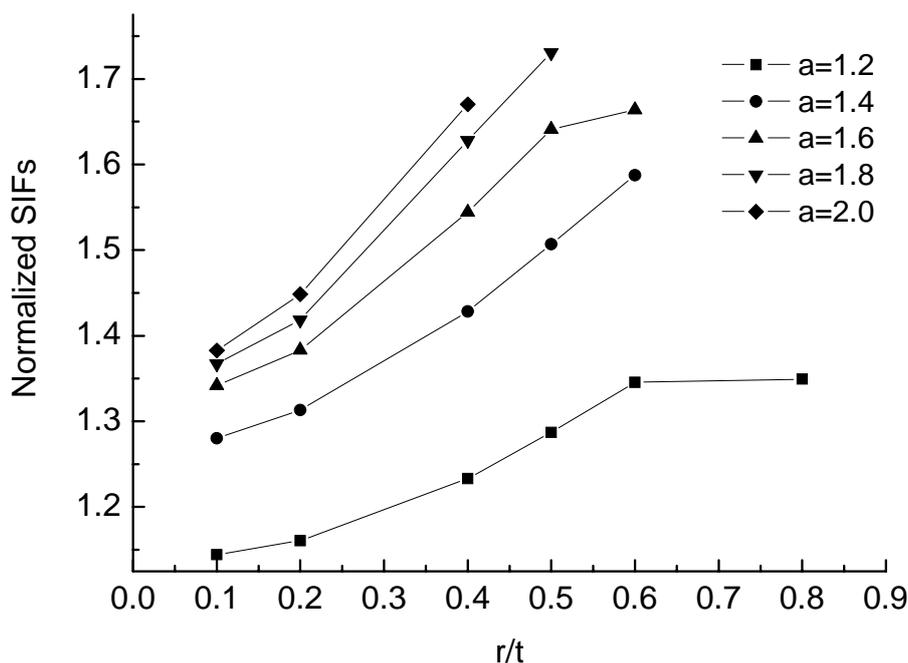


图 4-8 裂纹尖端无量化的应力强度因子 K_{CVm} 随 r/t 的变化

Fig.4-8 Variation of Normalized SIFs (K_{CVm}) with ratios of (a) in different ratios of (r/t)

从图 4-8 中我们可以清楚地看到：最大应力强度因子 K_{CVm} 在 a 特定的情况下随着 r/t 的增大而增大。即结构的危险性随着 r/t 的增大而增大，也就是说半球形表面缺陷的半径越大结构越危险。

4.5 本章小结

本章通过数值计算，发现含半球形表面缺陷和表面裂纹的有限大体中应力强度因子在裂纹前沿的随着 $2\phi/\pi$ 的增大而减小。同时通过合理选择计算模型得到了半球形表面缺陷几何尺寸以及裂纹几何尺寸对裂纹尖端最大应力强度因子的影响，即：

(1) 最大应力强度因子 K_{CVm} 在 r/t 相同的情况下都随着 a 的增大而增大，即有限体中结构的危险性随着裂纹半径的增大而增大。

(2) 最大应力强度因子 K_{CVm} 在比值 a 相同的情况下随着 r/t 的增大而增大，结构的危险性随着 r/t 的增大而增大，也就是说半球形表面缺陷的半径越大结构越危险。

第5章 后自由表面对应力强度因子的影响

5.1 引言

有限厚度板的三维半椭圆形表面裂纹问题的研究是由研究无限大体中内嵌钱币形裂纹问题开始的,即:通过椭圆形裂纹的一个轴线沿垂直于裂纹面的方向把无限大裂纹体切开,该平面即为前自由面;然后通过另一平行于前自由面的平面再将此半无限大体切成有限厚度的板,该平面称为后自由面。由于这两个自由面的引入,使弹性约束减少,则裂纹在拉伸载荷作用下易于扩展,即 K_I 将有所增加。在第四章我们发现当 r/t 较大而裂纹前沿又比较接近后自由表面时,后自由表面将使裂纹前缘较深处的应力强度因子随着 $2\phi/\pi$ 的增大而急剧减小,本章将深入分析这一现象。

5.2 后自由表面对应力强度因子的影响

5.2.1 后自由表面对应力强度因子的影响

如第四章所述,当 r/t 较大时,裂纹前沿靠近下表面的裂尖出现应力强度因子随着 a 的增大而减小的情况。为深入了解这个现象,我们可以研究裂纹半径与半球形表面缺陷半径之比 a 相同,而表面缺陷半径与裂纹体厚度之比 r/t 不同情况下应力强度因子的变化规律。在此我们选取裂纹前沿均匀分布的九个点的应力强度因子来分析。从表 4-1 至 4-6 中很容易得到所需要的数据,我们不难得到如图 5-1 至图 5-5 的规律。

图 5-1 中 A 为 $r/t=0.8$ 的曲线与 $r/t=0.6$ 曲线的交点;图 5-2 中 B 为 $r/t=0.6$ 的曲线与 $r/t=0.5$ 曲线的交点;图 5-3 中 C 为 $r/t=0.6$ 的曲线与 $r/t=0.5$ 曲线的交点;图 5-4 中 D 为 $r/t=0.5$ 的曲线与 $r/t=0.4$ 曲线的交点。

从图 5-1 至图 5-5 中看出绝大部分裂纹前沿的应力强度因子是随着 r/t 的增大而增大。但在图 5-1 中发现 $r/t=0.8$ 时的应力强度因子出现比 $r/t < 0.8$ 时的应力强度因子小的区域(交点 A 右侧),而图 5-2 中 $r/t=0.6$,图 5-3 中 $r/t=0.6$,图 5-4 中 $r/t=0.5$ 时也出现类似现象。

同时,我们从图 5-1 至图 5-5 中也可以看出,裂纹前沿 $2\phi/\pi=1$ 的裂尖(即表面裂纹的最深点)受后自由表面的影响最大。为此我们可以专门考察该点处的应力强度因子随裂纹体厚度的变化规律。

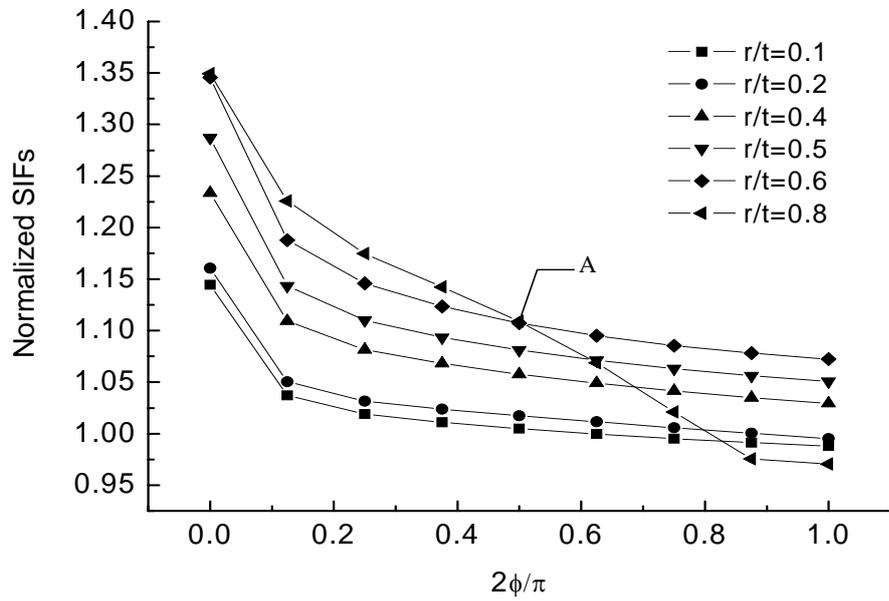


图 5-1 $a=1.2$ 时裂纹前沿无量纲化的应力强度因子

Fig.5-1 Variation of Normalized SIFs (K_{CVm}) along crack front in different ratios of (r/t) when $a=1.2$

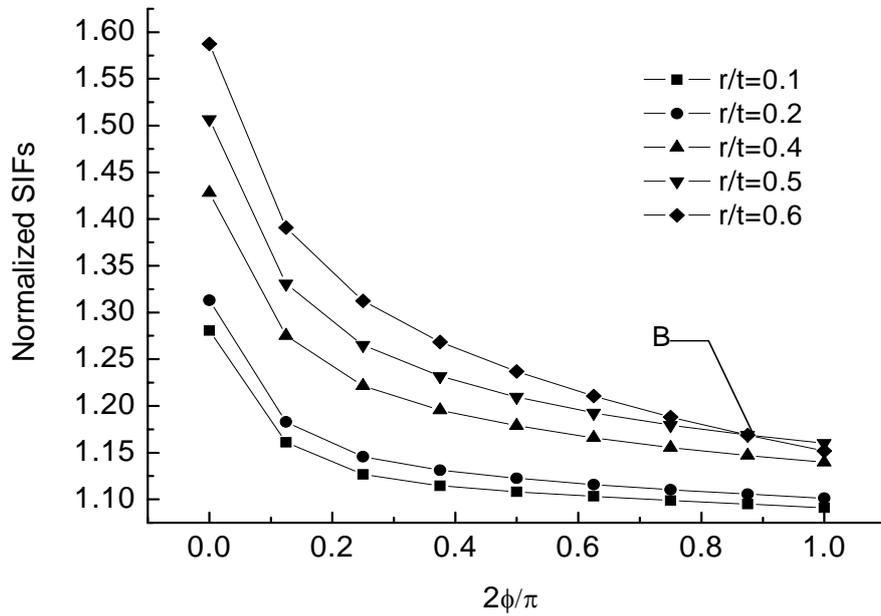


图 5-2 $a=1.4$ 时裂纹前沿无量纲化的应力强度因子

Fig.5-2 Variation of Normalized SIFs (K_{CVm}) along crack front in different ratios of (r/t) when $a=1.4$

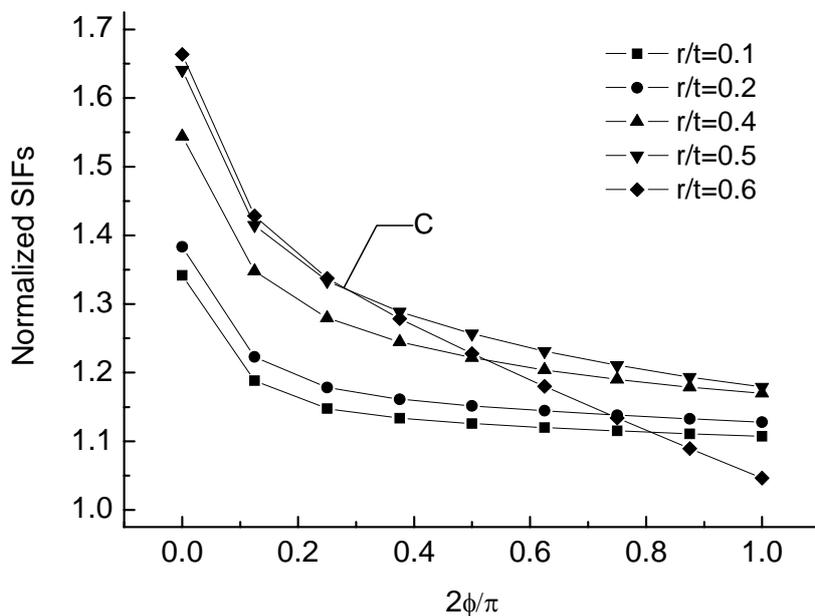


图 5-3 $a=1.6$ 时裂纹前沿无量纲化的应力强度因子

Fig.5-3 Variation of Normalized SIFs (K_{CVm}) along crack front in different ratios of (r/t) when $a=1.6$

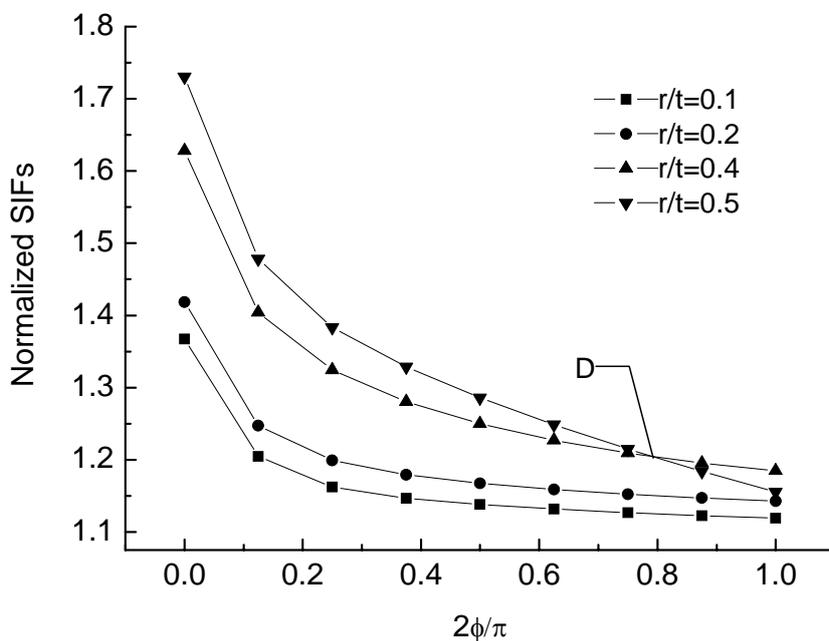


图 5-4 $a=1.8$ 时裂纹前沿无量纲化的应力强度因子

Fig.5-4 Variation of Normalized SIFs (K_{CVm}) along crack front in different ratios of (r/t) when $a=1.8$

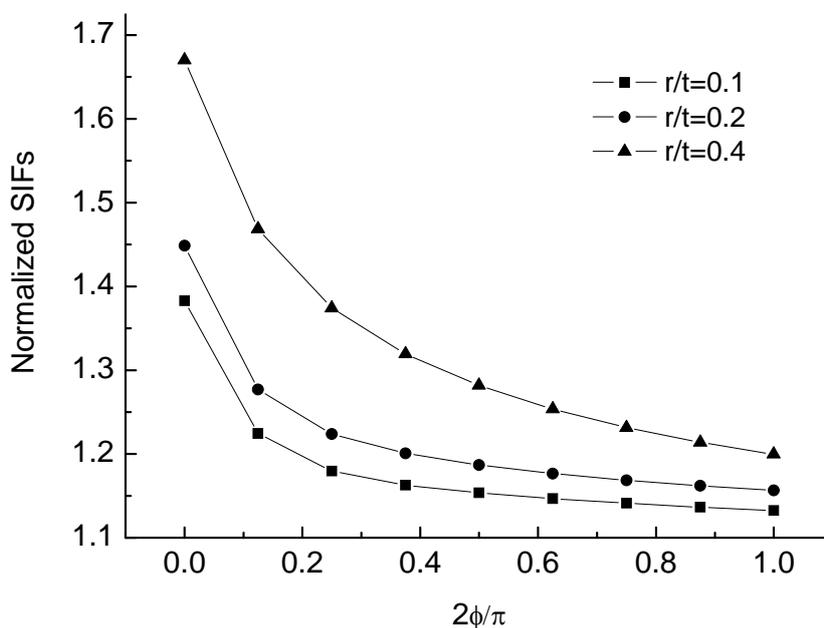


图 5-5 $a=2.0$ 时裂纹前沿无量纲化的应力强度因子

Fig.5-5 Variation of Normalized SIFs (K_{CVmi}) along crack front in different ratios of (r/t) when $a=2.0$

5.2.2 裂纹前沿最深点的应力强度因子

从图 5-1 至图 5-5 中可以看出：受后自由表面影响严重的均为距离后自由表面很近的裂纹前沿，所以我们可以把 R/t 作为自变量，无量纲化的应力强度因子作为因变量，分析裂纹前沿 $2\phi/\pi=1$ 处的应力强度因子(方便起见，记之为 K_{CVmi})。由表 4-1 至表 4-6 以及补充的下列模型的计算结果中不难得出如图 5-6 的分析结果。

补充的模型为：

- (1) $R/t=0.8$, $R/r=1.2$ 且 $r/W=0.1$
- (2) $R/t=0.8$, $R/r=1.4$ 且 $r/W=0.1$
- (3) $R/t=0.9$, $R/r=2.0$ 且 $r/W=0.1$

如果我们在图 5-6 中定义一个临界参数 ψ ：当 $R/t=\psi$ 时 K_{CVmi} 达到最大值。从图 5-6 中我们可以看出 $\psi \approx 0.8$ 。同时我们得到如下结论：

(1) 存在一个临界参数 ψ ，使得 $R/t=\psi$ 时，裂纹前沿最深点的应力强度因子 K_{CVmi} 为所有 R/t 比值下的最大值。

(2) 当 $R/t < \psi$ 时，裂纹前沿最深点的应力强度因子 K_{CVmi} 将随着 R/t 的

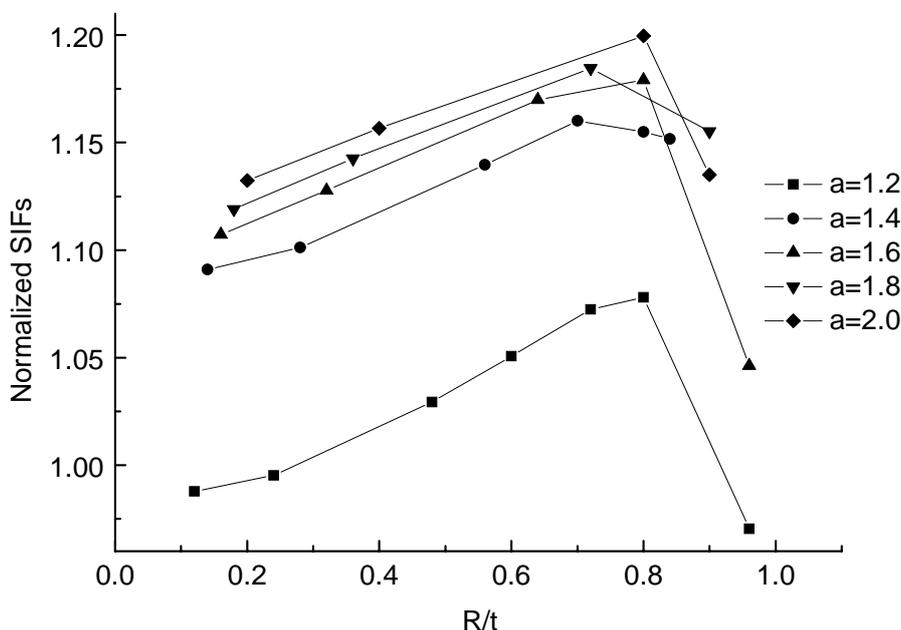


图 5-6 裂纹前沿 $2\phi/\pi = 1$ 处应力强度因子 (K_{CV}) 随 R/t 的变化

Fig.5-6 Variation of Normalized SIFs (K_{CV}) of the point $2\phi/\pi = 1$ with ratios of (R/t) in different ratios of (a)

增大而增大。又因为在 a 特定时 R/t 与 r/t 成正比，则从图 5-1 至 5-5 中我们看出裂纹前沿所有点的应力强度因子均随着 R/t 的增大而增大。

(3) $R/t \geq \psi$ 裂纹前沿的最深点的应力强度因子 K_{CVmi} 将随着 R/t 的继续增大而减小，即此时裂纹前沿靠近下表面的裂尖的应力强度因子将随着 R/t 增大而减小。

5.3 本章小结

本章在第四章内容的基础上深入分析了含半球形表面缺陷和表面裂纹的有限大体的后自由表面对裂纹尖端应力强度因子的影响，也即裂纹体厚度对裂纹前沿应力强度因子的影响。

通过分析发现：有限厚度并不是对裂纹前沿所有应力强度因子都起放大作用。通过对受后自由表面影响最为严重的裂纹前沿最深处的应力强度因子的分析，我们还发现：

(1) 当裂纹半径与有限厚度三维裂纹体的厚度之比 R/t 小于 ψ ($\psi \approx 0.8$) 时，裂纹前沿最深点的应力强度因子 K_{CVmi} 将随着 R/t 的增大而增大。结合

相关分析可以知道裂纹前沿所有点的应力强度因子均随着 R/t 的增大而增大。

(2) 当裂纹半径与有限厚度三维裂纹体的厚度之比 R/t 大于 ψ 时，裂纹前沿的最深点的应力强度因子 K_{CVmi} 将随着 R/t 的继续增大而减小。即此时裂纹前沿靠近下表面的裂尖的应力强度因子将随着 R/t 增大而减小。

(3) 存在一个临界参数 ψ ，使得 $R/t = \psi$ 时，裂纹前沿最深点的应力强度因子 K_{CVmi} 为所有 R/t 比值下的最大值。

结论

本文研究了含半球形表面缺陷的三维无限大线弹性体、有限大线弹性体的表面裂纹问题(本文称之为表面缺陷裂纹问题)。

通过本文的数值计算,我们得到以下结论:

(1) 当 $R/t \leq 0.2, R/W \leq 0.2$ 且 $R/H \leq 0.2$ 时,我们可以认为含半球形表面缺陷的裂纹体为无限大,而 $R/t > 0.2, R/W > 0.2$ 且 $R/H > 0.2$ 时,我们可以认为裂纹体为有限大。

(2) 无限体和有限体中表面缺陷裂纹问题中,裂纹前沿最大的应力强度因子(K_{CVm})均发生在裂纹前沿与前自由表面相交处($2\phi/\pi = 0$)。

(3) 无限体表面缺陷裂纹问题中,裂纹前沿最大的应力强度因子 K_{CVm} 是裂纹半径与表面缺陷半径之比(a)的函数。

(4) 无限体表面缺陷裂纹问题中,存在一个临界值 a_1 使得:当 $a = a_1$ 时, K_{CVm} 与无半球形表面缺陷时无限大体中表面裂纹的最大应力强度因子(K_{SCm})相等,即 $K_{CVm} = K_{SCm}$; 当 $a < a_1$ 时, $K_{CVm} < K_{SCm}$, 即此时表面缺陷的存在对结构具有保护作用,即屏蔽效应; 当 $a > a_1$ 时, $K_{CVm} > K_{SCm}$, 即表面缺陷的存在放大了应力强度因子,也即表面缺陷的存在使得结构更加危险,此为放大效应。

(5) 无限体表面缺陷裂纹问题中,当 $a = 2$ 时, K_{CVm} 取所有比值 a 下的最大值,该值为 K_{SCm} 的 1.106 倍,即相对于无表面缺陷的表面裂纹问题对应应力强度因子的最大放大系数为 1.106; 当 $a < 2$ 时 K_{CVm} 随着 a 的增大而增大; 当 $a > 2$ 时, K_{CVm} 随着 a 的增大而减小,并且当 $a \geq 5.5$ 时表面缺陷的影响可以忽略不计。

(6) 在有限大体的表面缺陷裂纹问题中, K_{CVm} 在 r/t 特定的情况下随着比值 a 的增大而增大; 在 a 特定的情况下随着 r/t 的增大而增大。

(7) 在表面缺陷裂纹问题中,有限的厚度并不是对所有裂纹前沿裂尖的应力强度因子起到放大作用,而是存在一个临界值 ψ , 使得:当 $R/t > \psi$ 时,靠近下表面的裂纹前沿的应力强度因子 K_{CV} 随着 R/t 的增大而减小; $R/t < \psi$ 时, K_{CV} 随着 R/t 的增大而增大。

参考文献

- 1 张伟. 航天器这间碎片防护结构高速撞击实验研究及参数优化. 哈尔滨工业大学博士论文. 1999 年
- 2 贾学明. 岩石断裂韧度新型试样CCNBD和FBD的应力强度因子数值标定. 四川大学硕士论文. 2002 年:1
- 3 Г.П.切列帕诺夫. 脆性断裂力学[M]. 黄克智等译. 科学出版社.1990
- 4 陶伟明, 郭一木, 曹志远. 三维有限裂纹体分析. 固体力学学报.2001, 22(3):256
- 5 崔振源. 表面裂纹理论及其应用. 西北工业大学出版社. 1987:1
- 6 陈梦成, 余荷根, 汤任基. 三维裂纹问题的高精度数值解法. 固体力学学报. 2002, 23(2):207-211
- 7 尹峰. 关于表面裂纹理论的研究与进展(上). 沈阳航空工业学院学报.2003, 20(3):88-91
- 8 Haddad E L. M. H., Green E. L. and Snedden T. N. Fatigue strength prediction of notches based on fracture mechanics, in Fatigue Thresholds, EMAS, London, 1982:777-791
- 9 Irwin G. R. The crack extension force for a part-through crack in a plate, Trans, ASME, J. Appl. Mech. 1982, 19:651-654
- 10 徐振兴. 断裂力学[M]. 湘潭:湘潭大学出版社. 1988
- 11 Paris P. C. Sih G. C. Fracture toughness testing and its application, ASTM, STP381, 1981
- 12 Kobayshi, A. S. Fatigue life analysis and prediction. Proc. of the second international congress on fracture. 1985
- 13 Hartranft R. J., Sih G. C. In Methods of Analysis of Crack problem. International Journal of Fracture. 1987, 32:179-238
- 14 Shah , R. C., Kobayshi, A. S., The Surface Crack. ASTM, STP513, 1996:3
- 15 Raju I. S. and Newman J. C., Jr. Stress-intensity Factors for a Wide Range of Semi-elliptical Surface Cracks in Finite-thickness Plates. Engineering Fracture Mechanics. 1979, 11:817-829
- 16 Smith R. A., Miller K. J. Fatigue cracks at notches. International Journal of Mechanical Science. 1977, 19:11-22

- 17 Lucas P. Stress intensity factors of small cracks at notches. *Engineering Fracture Mechanics*. 1987, 26:471-3
- 18 Kujawski D. Estimation of stress intensity factors for small cracks at notches. *Fatigue and Fracture Engineering Materials and Structures*. 1991, 14(10):953-65
- 19 Jones R., Peng D. ect. Weight functions, CTOD, and related solutions for cracks at notches. *Engineering Failure Analysis*. 2004, 11:79-114
- 20 Peng D., Wallbrink C. Jones R. Stress intensity factor solutions for finite body with quarter-elliptical flaws emanating from a notch. *Engineering Fracture Mechanics*. 2005, 72:1329-1343
- 21 Griffith , A. A. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. *Phil. Trans.*1921 A221,163-198
- 22 Sneddon , I. N. The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid . *Proc. Roy. Lon*, 1946, A187, 229-260
- 23 Irwin, G. R. Analysis of Stress and Strains near the end of a Crack of traversing a Plate.*Trans. ASME J. Aool. Mech.*, 1957, 24:361-364
- 24 Aliabadi M. H., Rooke D. P. *Numerical Fracture Mechanics*. Kluwer Academic Publishers. 1991:1-2
- 25 Sach R. A. Extension of Griffith Theory of rupture to three dimensions. *Proc.Phys. Soc.* 58, 1946:729-36
- 26 Sneddon I. N. The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid. *Proc. R. Soc., Ser. A*, 1946:187
- 27 Green A. E. and Sneddon I. N. The stress distribution of the neighbourhood of a flat elliptical crack in an elastic solid. *Proc. Camb. Phil. Soc.* 1956:46
- 28 Smith F. W., Emery A. F. and Kobayashi A. S. Stress intensity factors for cracks, Part I: Infinite solid. *J. Aool. Mech.*, *Trans. ASME* 34 Ser. E. (Dec.1967):946-52
- 29 Shah R. C. and Kobayashi A. S. Stress-intensity factor for an elliptical crack under arbitrary normal loading. *Int. J. Eng. Fact. Mech.* 3(July 1971):71-96
- 30 Kassir M. K. and Sih G. C. Three-dimensional stress distribution around an elliptical crack under arbitrary loadings. *J. Appl. Mech.*, *Trans. ASME* 33 (Seot. 1966):601-11
- 31 Vijayakumar K. and Atluri S. N. An embedded elliptical flaw in an infinite

- solid subject to arbitrary crack face traction. *ASME J. Appl. Mech.* 1981, 49:88-98
- 32 Irwin G. R. The crack extension force for a part-through crack in plate. *J. Appl. Mech. Trans. ASME.* 1962, 29:651-4
- 33 Kobayashi Albert S. *Linear Elastic Fracture Mechanics. Computational Methods in the Mechanics of Fracture Volume 2 in Computational Methods in Mechanics*, edited by Atluri S. N. Elsevier Science Publishers B.V. 1986:22-53
- 34 龚江宏. 陶瓷材料断裂力学. 清华大学出版社. 2001:23
- 35 邓建刚. 工程结构中裂纹扩展轨迹的边界元数值模拟. 北京工业大学硕士学位论文. 2003:12-14
- 36 Boresi P. Chong Ken P. Sunil Saigal 著. 工程力学中的近似解方法. 叶志明, 杨骁, 朱怀亮译. 第二版. 高等教育出版社, 2005:134-138
- 37 贾学明, 王启智. 三维裂纹分析软件 FRANC3D. *计算力学学报.* 2004, 21(6):764:768
- 38 Hanson J., Bittencourt T., Ingraffea A. R. Three-Dimensional Influence Coefficient Method for Cohesive Crack Simulations. *Engineering Fracture Mechanics.* 2004, 71(15):2109-2124
- 39 Pettit R., Chen C.-S., Wawrzynek P., Ingraffea A. R. Process Zone Size Effects on Naturally Curving Cracks. *Engineering Fracture Mechanics.* 2001, 68(10):1181-1205
- 40 Hwang C., Wawrzynek P. A., Ingraffea A. R. On the virtual crack extension method for calculating the derivatives of energy release rates for a 3D planar crack of arbitrary shape under mode-I loading. *Engineering Fracture Mechanics.* 2001, 68 (7):925-947
- 41 Chen C.-S., Krause R., Pettit R. G., Banks-Sills L. ect. Numerical Assessment of T-stress Computation Using a P-version Finite Element Method. *Int. J. Fracture.* 2001, 107(2):177-199
- 42 Spievak L., Lewicki D., Wawrzynek P., ect. Simulating Fatigue Crack Growth in Spiral Bevel Gears. *Engineering Fracture Mechanics.* 2001, 68(1):53-76
- 43 Ural A., Zehnder A. T., Ingraffea A. R. Fracture mechanics approach to facesheet delamination in honeycomb: measurement of energy release rate of

- the adhesive bond. *Engineering Fracture Mechanics*. 2003, 70(1):93-103
- 44 Han T. S., Ural A., Chen C. S. et. Delamination buckling and propagation analysis of honeycomb panels using a cohesive element approach. *Int J Fracture*. 2002, 115(2):101-123
- 45 Chen C.-S., Wawrzynek P. A., Ingraffea A. R. Residual strength prediction of aircraft fuselages using crack-tip opening angle criterion. *AIAA J*. 2002, 40(3): 566-575
- 46 OSM Menu and Dialog Reference [EB]. <http://www.cfg.cornell.edu/>, 2003
- 47 FRANC3D Concepts/Users Guide [EB]. <http://www.cfg.cornell.edu/>, 2003
- 48 FRANC3D Menu & Dialog Reference [EB]. <http://www.cfg.cornell.edu/>, 2003
- 49 Xiangqiao Yan. Cracks emanating from circular hole or square hole in rectangular plate in tension. *Engineering Fracture Mechanics*. 2006, 73:1743-1754
- 50 Newman J. C., Jr. Stress-Intensity Factor Equations for Cracks in Three-Dimensional Finite Bodies Subjected to Tension and Bending Loads. *Computational Methods in the Mechanics of Fracture Volume 2 in Computational Methods in Mechanics*, edited by Atluri S. N. Elsevier Science Publishers B.V. 1986:312-334

攻读学位期间发表的学术论文

- 1 Xinke Xiao and Xiangqiao Yan. A numerical Analysis for Cracks Emanating from a Surface Semi- Spherical Cavity in an Infinite Elastic Body By FRANC3D. Engineering Fracture Mechanics. (已投)
- 2 Xinke Xiao and Xiangqiao Yan. A New Numerical Analysis for a Surface Semi-Circular Crack. Engineering Fracture Mechanics. (已投)

哈尔滨工业大学硕士学位论文原创性声明

本人郑重声明：此处所提交的硕士学位论文《半球形表面缺陷影响下表面裂纹应力强度因子的数值分析》，是本人在导师指导下，在哈尔滨工业大学攻读硕士学位期间独立进行研究工作所取得的成果。据本人所知，论文中除已注明部分外不包含他人已发表或撰写过的研究成果。对本文的研究工作做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式注明。本声明的法律结果将完全由本人承担。

作者签字：

日期： 年 月 日

哈尔滨工业大学硕士学位论文使用授权书

《半球形表面缺陷影响下表面裂纹应力强度因子的数值分析》系本人在哈尔滨工业大学攻读硕士学位期间在导师指导下完成的硕士学位论文。本论文的研究成果归哈尔滨工业大学所有，本论文的研究内容不得以其它单位的名义发表。本人完全了解哈尔滨工业大学关于保存、使用学位论文的规定，同意学校保留并向有关部门送交论文的复印件和电子版本，允许论文被查阅和借阅，同意学校将论文加入《中国优秀博硕士学位论文全文数据库》和编入《中国知识资源总库》。本人授权哈尔滨工业大学，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文，可以公布论文的全部或部分内容。

作者签名：

日期： 年 月 日

导师签名：

日期： 年 月 日

哈尔滨工业大学硕士学位论文涉密论文管理

根据《哈尔滨工业大学关于国家秘密载体保密管理的规定》，毕业论文答辩必须由导师进行保密初审，外寄论文由科研处复审。涉密毕业论文，由学生按学校规定的统一程序在导师指导下填报密级和保密期限。

本学位论文属于 保密，在 年解密后适用本授权书
 不保密

(请在以上相应方框内打“√”)

作者签名：

日期： 年 月 日

导师签名：

日期： 年 月 日

致谢

值此论文完成之际，我衷心感谢在我攻读硕士期间给予我帮助和关怀的所有老师、同学、朋友们。

本论文是在我的导师闫相桥教授认真负责和悉心指导下完成的，在此衷心感谢闫相桥教授在我攻读硕士期间给予的悉心教诲和无私帮助。闫老师学识渊博，治学严谨，严于律己，是我一生学习的榜样。对我的问题他总能悉心的作以解释和答复，再一次向尊敬的闫相桥教授表示衷心的感谢。

在我攻读硕士期间也得到了周振功教授、张伟教授等老师的帮助和指导，在此向各位老师表达我最诚挚的谢意。

感谢康乃尔大学提供的免费裂纹分析软件 FRANC3D，这使得本文的分析工作得以简便顺利地进行，同时也要感谢康乃尔大学的 Bruce 高级助理研究员和重庆交通科研设计院的助理研究员贾学明给我的指导。

特别感谢高勋朝、周艳青、王海鹏等同学以及师兄刘宝良，与他们的讨论使我受益匪浅。盖芳芳、蒋彩霞同学给本文提出了不少宝贵的建议，在此表示诚挚的谢意。感谢同班同学们以及其他师兄、师弟、师妹们，正是与他们的相处才使得我的硕士生活丰富多彩。

感谢我的家人以及曾关心和帮助过我的每一个人。