

# 基于 FRANC3D 计算三维疲劳裂纹最大应力强度因子

于世光, 朱如鹏

(南京航空航天大学 机电学院, 南京 210016)

**摘 要:**文中建立了三维模型并借助边界元分析软件 FRANC3D 采用边界元法计算了三维表面裂纹前沿不同位置处的应力强度因子,说明了 FRANC3D 基于的边界元理论计算半椭圆型表面裂纹应力强度因子的过程,并与理论公式计算结果相比较。结果表明,软件计算结果与理论误差较小,裂纹最深处应力强度因子最大。

**关键词:**边界元法; 强度因子(SIF); FRANC3D

**中图分类号:**TP391

**文献标识码:**A

**文章编号:**1002-2333(2008)06-0108-03

## Calculation of 3D Fatigue Crack Greatest Stress Intensity Factor Based on FRANC3D

YU Shi-guang, ZHU Ru-peng

(College of Mechanical Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract:** This paper established a three-dimensional model and calculated different locations of the stress intensity factor with boundary element analysis software-FRANC3D. Introduced the Boundary Element Theory to calculate stress intensity factor of a type of semi-elliptical surface cracks, with the theoretical calculation results compared meanwhile. The results show that: Software calculated results with a little error, the biggest stress intensity factor in the innermost of the crack.

**Key words:** boundary element method; intensity factor(SIF); FRANC3D

工程结构经常存在表面裂纹和缺陷,例如齿轮结构作为传递功率和运动的重要零件经常会发生齿根裂纹现象,航空发动机轮盘和叶片也可能会出现表面裂纹。应力强度因子(SIF)是判断含裂纹构件断裂和计算裂纹扩展速率的重要参量,应用断裂力学来解决工程实际问题,首先必须确定裂纹前沿的应力强度因子。自断裂力学兴起之后,三维裂纹问题有了较大发展,得到不少成果,但计算都相当复杂,大多数方法集中在理论推导和实验上。当前已有许多种计算应力强度因子的方法,如边界元法、有限元法等。

随着边界元、有限元理论的发展,以边界元法、有限元法求解应力强度因子得到了广泛的应用,一批计算机应用

软件相继涌现出来,如 ANSYS、ABQUS、MSC Marc 等,在一些工程断裂问题中已得到广泛的应用。其次 ADINA、NAGRO、AF-GROW、NASTRAN、FRANC3D 也都是非常优秀的断裂分析软件,随着它们的应用,应力强度因子的求解也逐渐从二维裂纹问题向三维裂纹问题延伸。

### 1 基于边界元法的应力强度因子计算

三维裂纹前沿应力强度因子的计算方法,可以直接利用边界元理论

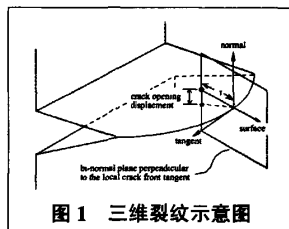


图1 三维裂纹示意图

公路等级的升高,集装箱内监测点对路面随机振动的响应越来越大,即行驶越来越颠簸。从模态参与因子曲线可以看出,当振动频率为 24.8Hz、40.7Hz 时容易激发设备产生共振。根据仿真分析得出的在不同运输工况下设备的垂向均方根加速度以及共振频率点,从而可从理论上确定设备的集装箱运输安全性。

### 4 结论

本文利用动力学仿真分析软件 ADAMS 建立集装箱公路运输的振动试验动力学模型,可以很方便而且精确地得到集装箱上装货物的加速度信号,同时也可方便地改变路面激励,不仅节省了大量实物测量所需的费用,而且也缩短了实物试验的时间,为判定货物的集装箱运输安全性提供了理论依据。

总之,通过应用 ADAMS 软件技术对集装箱运输振动进行分析预测,在货物运输安全性的检验阶段具有方

便精确等优点,在实际工程应用和检测中必将会得到更广泛的应用。

### 【参考文献】

- [1] 李平.半挂车悬挂系统的分析与改进[J].汽车科技,2000,1(4):51-55.
- [2] 陈栋华,靳晓雄.轮胎刚度和阻尼非线性模型的解析研究[J].中国工程机械学报,2004,2(4):408-412.
- [3] 陈松,黄泽好,等.摩托车平顺性的仿真研究[J].机械强度,2006,28(3):465-469.
- [4] 王铁,张国忠,等.路面不平度影响下的汽车驱动桥载荷[J].东北大学学报,2003,24(1):50-52.
- [5] 杨松.牵引车与挂车悬架的组合选择[J].商用汽车,2003,1(8):68-69.

(编辑 启迪)

作者简介:曾永辉(1982-)硕士研究生,主要研究方向为虚拟样机技术,计算机辅助设计制造。

收稿日期:2008-03-26

推出其前沿张开位移、切向位移和撕裂位移,再利用弹性断裂理论,推算出裂纹前沿的应力强度因子;也可以运用 FRANC3D 软件方便的后处理功能来计算。

### 1.1 边界元理论求解<sup>[1]</sup>

忽略体积力对三维弹性体进行静力分析得到的边界方程为:

$$C_{ij}(P)U_j(P) + \int_S u_j(Q)T_{ij}^*(P,Q)dS(Q) = \int_S T_j(Q)U_i^*(P,Q)dS(Q) \quad (1)$$

式中,  $U_i^*$ 、 $T_{ij}^*$  分别是面力值和位移的基本解, 本文采用 Kelvin 解;  $S$  为边界;  $P$ 、 $Q$  分别为边界上的点;  $C_{ij}$  为表面特征系数:

$$C_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & P \in S \quad (\text{即 } P \text{ 在边界上}) \\ \delta_{ij}, & P \in V^+ \quad (P \text{ 在 } V \text{ 域内}) \\ 0, & P \in V^- \quad (P \text{ 在 } V \text{ 域外}) \end{cases} \quad (2)$$

若将边界划分为  $m$  个单元, 单元节点数为  $n$ , 则单元几何和位移及面力差值函数为:

$$\begin{aligned} X_i(\xi, \eta) &= \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) X_{ik} \\ u_i(\xi, \eta) &= \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) u_{ik} \\ T_i(\xi, \eta) &= \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) T_{ik} \end{aligned} \quad (3)$$

式中,  $X_{ik}$ 、 $u_{ik}$  和  $T_{ik}$  分别是第  $k$  节点沿  $i$  方向坐标值、位移与面力值。内插值函数可以采用自然坐标定义。将式(3)代入式(1)对每一边节点  $P$  可建立如下边界积分离散方程:

$$C_{ij}(P)U_j(P) + \sum_{l=1}^m \left\{ \sum_{k=1}^n \left[ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_k(\xi, \eta) T_{ij}^*(P, Q) |J| d\xi d\eta \right] u_{ik}^{(l)} \right\} = \sum_{l=1}^m \left\{ \sum_{k=1}^n \left[ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_k(\xi, \eta) u_j^*(P, Q) |J| d\xi d\eta \right] T_{ij}^{(l)} \right\} \quad (4)$$

式(4)中  $|J|$  为雅可比不等式,  $u_{ik}$  和  $T_{ik}$  分别是第  $k$  节点沿  $j$  方向位移与面力值。其矩阵式为:

$$Au = BT \quad (5)$$

根据已知边界条件求解以上线性方程组便可求得边界的未知位移与面力值。

注意: 考虑裂纹前沿单元的奇异性(由断裂线性力学分析可知裂纹前沿应力场和应变场存在  $\frac{1}{\sqrt{r}}$  奇异性), 裂纹前缘必须使用奇异性边界元。

至此, 由裂纹前缘节点坐标值  $u_{ik}$  结合型函数可以得到裂纹尖端节点位移表达式, 然后由线性断裂力学可知, 在平面应变下裂纹前沿开裂, 裂纹尖端处张开位移  $u_1$ 、切向位移  $u_2$  和撕裂位移  $u_3$  与应力强度因子  $K_I$ 、 $K_{II}$  和  $K_{III}$  对应关系式为:

$$u_j = \frac{2(1-\nu^2)}{E} \left( \frac{2\gamma}{\pi} \right)^{1/2} K_j + O(\gamma) \quad j=1, 2, 3 \quad (6)$$

式(5)中  $k_1$ 、 $k_2$  和  $k_3$  分别是 I、II、III 型断裂的应力强度因子  $K_I$ 、 $K_{II}$  和  $K_{III}$ 。

### 1.2 运用 FRANC3D<sup>[2]</sup>解

FRANC3D 软件断裂分析软件 FRANC3D 由: 立体对象建模器 OSM(Object Solid Modeler)、裂纹分析器 FRANC3D (Fracture Analysis Code in 3Dimensions)以及边界元系统 BES(Boundary Element System)三部分组成。文献[8]已对该软件总体功能作了较为全面的介绍。

在 FRANC3D

中, 使用最大周向应力准则作为断裂判据确定裂纹扩展方向, 即裂纹将沿最大周向应力的方向, 同时即剪应力为 0 方向进行开裂。当此方向的周向应力达到临界值时, 裂纹失稳扩展。而对于 SIF 的计算则是基于边界元理论(详见文献[9])。

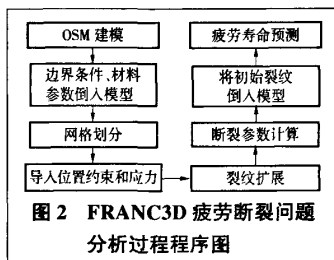


图2 FRANC3D 疲劳断裂问题分析流程图

### 2 应力强度因子的理论表达式<sup>[8]</sup>

$K_I$ 、 $K_{II}$  和  $K_{III}$  分别称为 I、II、III 型裂纹尖端应力场强度因子, 它们控制了裂纹尖端的应力、应变场, 是表示场强的物理量。一般来说, 应力强度因子  $K_I$  可以写成如下形式<sup>[7]</sup>:

$$K_I = \delta \sqrt{\pi a} f(a, b, \dots) \quad (7)$$

式中  $\delta$  为名义应力,  $a$  为裂纹尺寸,  $f(a, b, \dots)$  为几何修正系数, 反映构件和裂纹尺寸对裂纹尖端应力场的影响。由式(7)可以看出: 对于线性弹性物体来说, 应力强度因子与载荷呈线性关系, 并依赖于物体与裂纹的几何形状和尺寸。II 型和 III 型裂纹尖端应力场也可写成类似的形式, 只是式中的正应力  $\delta$  应换成为剪应力  $\tau$ 。

### 3 算例及误差分析

在工程构件内部, 裂纹在外力的作用下扩张方式可以分为三种形式: I 型(张开型), 在垂直于裂纹面的拉力作用下, 使裂纹张开而扩展; II 型(滑开型), 在平行于裂纹表面而垂直于裂纹前缘的剪应力作用下, 使裂纹滑开而扩展; III 型(撕开型), 在即平行于裂纹表面又平行于裂纹前缘的剪应力作用下, 使裂纹撕开而扩展。其中 I 型裂纹是最危险的, 实际裂纹即使是复合型裂纹, 为了更加安全也往往把它作为 I 型处理, 因此我们重点研究 I 型裂纹。

图 3 为两端受均匀拉力的具有半圆形裂纹厚板与其在 FRANC3D 中模型, 其中材料杨氏模量  $E=2 \times 10^5 \text{ MPa}$ , 泊松比  $\nu=0.3$ ,  $h=2b$ 。

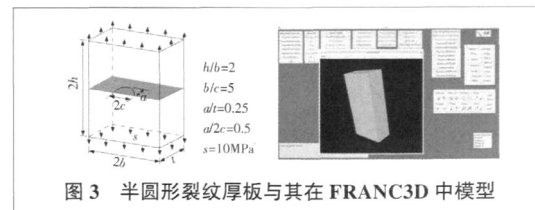


图3 半圆形裂纹厚板与其在 FRANC3D 中模型

在对裂纹体进行数值分析时, 首先要对其进行应力分析, 图 4 所示即为利用 FRANC3D 的前处理功能来实现裂纹体的应力分析, 同时可以实现裂纹体的表面位移,

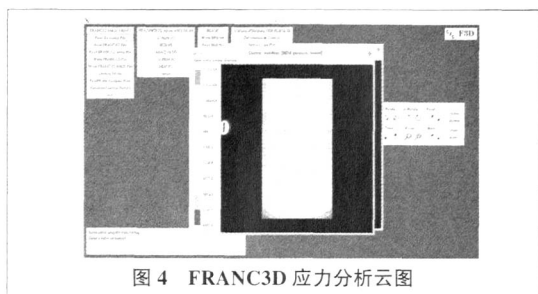
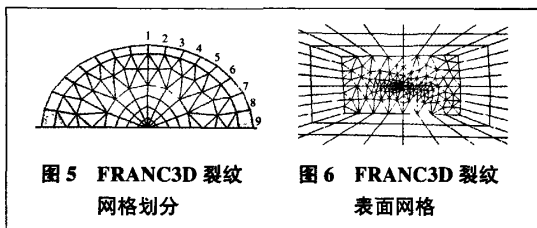


图4 FRANC3D 应力分析云图

变形量的数值分析。

为了确定裂纹前缘不同位置的应力强度因子,将裂纹体前缘按  $\pi/16$  角度划分单元,共划分为 16 份,该裂纹扩展前缘,其上共有 17 个节点。裂纹面最深点左右两边裂纹前缘对称,取右半边计算裂纹前缘各节点处的 I 型应力强度因子  $K_I$ ,自裂纹最深点向右节点编号依次为 1、2、3、4、5、6、7、8、9,节点 1 为裂纹最深点、节点 9 为裂纹前缘右表面点,如图 5 所示。图 6 为半圆形裂纹外侧裂纹体表面网格化分的局部放大图。采用 FRANC3D 边界元法计算裂纹前缘各节点处的应力强度因子。

图5 FRANC3D 裂纹  
网格划分图6 FRANC3D 裂纹  
表面网格

按照图 2 所示的 FRANC3D 疲劳断裂问题分析流程进行分析计算,图 7 所示用 FRANC3D 中的 compute DC SIF for all cracks 命令计算裂纹前缘各节点的应力强度因子,在计算 SIF 前要注意正确分割裂纹周围各线段并正确划分各面的网格,计算结果见表 1。

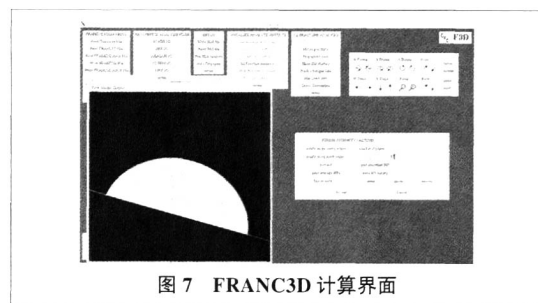


图7 FRANC3D 计算界面

表1 应力强度因子边界元解与理论解对比 /MPa·m<sup>1/2</sup>

|        | 裂纹前缘点编号 |        |        |        |        |        |        |        |        |
|--------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|        | 1       | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      |
| 边界元解   | 1.2238  | 1.1435 | 1.0781 | 1.0409 | 1.0447 | 1.0403 | 1.0361 | 1.0311 | 1.0258 |
| 理论表达式解 | 1.1950  | 1.1332 | 1.0807 | 1.0601 | 1.0563 | 1.0470 | 1.0458 | 1.0469 | 1.0494 |
| 误差/(%) | 2.85    | 0.90   | 2.40   | 1.92   | 1.16   | 0.64   | 0.93   | 1.51   | 2.25   |

根据文献[4],该受均匀拉伸应力的含裂纹平板模型裂纹前缘各节点的应力强度因子可表示为:

$$K_I = \frac{\delta \sqrt{\pi a}}{E(K)} f\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{t}, \frac{c}{b}, \theta\right) \quad (8)$$

式(8)具有式(7)相同的形式,由式(12)可得:

$$F\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{t}, \frac{c}{b}, \theta\right) = (K_I / \delta \sqrt{\pi a}) \cdot E(K) \quad (9)$$

式中  $E(k)$  为第 2 类椭圆积分

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, k^2 = 1 - \left(\frac{a}{c}\right)^2 \quad (10)$$

$F\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{t}, \frac{c}{b}, \theta\right)$  是与外力无关、只取决于裂纹形状和结构几何尺寸的修正系数。 $\theta$  为裂纹前缘各点所对应的角度。该算例中,  $a/c=1$ ,  $a/t=0.25$ ,  $\theta=0: \pi/16: \pi/2$ , 文献[4]列出了各个角度对应的  $F(a, c, t, b, \theta)$  值,由式(13)及其它已知条件反算出相应的应力强度因子。表 1 将有限元计算结果和文献[4]基于实验基础上的理论值进行了对比,由表 1 可知:边界元的计算结果与建立在实验基础上的理论结果非常相近,最大误差为 2.85%,裂纹最深处应力强度因子最大。

#### 4 结 语

当前数值分析方法在断裂分析中得到广泛应用,边界单元法由于其边界方程能精确满足场的要求,从而大大降低求解问题的维数,同时提高求解问题的精度,因而在处理复杂工程断裂问题得到广泛的应用。

本文所应用的边界元分析软件 FRANC3D 操作简单,计算结果与文献提供的方法吻合良好,是一款实用的工程结构裂纹扩展分析仿真软件。经过计算得到裂纹最深处应力强度因子值最大的结论,为工程构件疲劳断裂分析提供了依据。

#### 【参考文献】

- [1] Brebbia C A, Tells J C, Warble L C. Boundary element technique—Theory and Application in Engineering [M]. Berlin: Springer-verlay, 1984.
- [2] Franc3D Menu & Dialog Reference [EB/OL]. <http://www.cfg.cornell.edu/>, 2003.
- [3] 蔡瑞英. 边界元程序设计及工程应用 [M]. 南京: 科学技术出版社, 1996: 195–218.
- [4] 中国航空研究院. 应力强度因子手册 [M]. 北京: 科学出版社, 1993: 715–716.
- [5] 尹双增. 断裂损伤理论及应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1992.
- [6] Raju I S, Newman J C. Stress-intensity factors for a wide range of semi-elliptical surface cracks in finite-thickness plates [J]. Engineering Fracture Mechanics, 1979, 11(2): 817–829.
- [7] Aliabadi M H. Boundary element formulations in fracture mechanics [J]. Appl Mech Rev, 1997, 50(2): 83–96.
- [8] 瞿伟廉, 等. 工程结构三维疲劳裂纹最大应力强度因子计算 [J]. 地震工程与工程振动, 2007(6): 60–65.
- [9] 贾学明, 王启智. 三维断裂分析软件 FRANC3D [J]. 计算力学学报, 2004, 21(6): 764–768.
- [10] 杨琦. 表面应力强度因子计算边界元法 [J]. 工程力学, 1990(2): 59–63.

(编辑 黄 荻)

作者简介: 于世光(1983–), 男, 硕士, 专业方向为机械 CAD 及自动化。  
朱如鹏, 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为机械设计 CAD、CAE、机械传动设计理论与技术。

收稿日期: 2008–03–29